

CHP6 : LES NOMBRES COMPLEXES

I. NOTIONS DE BASE

On considère tous les couples de réels $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- On définit alors deux lois $+$ et $\times$ par, si $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$, alors $z + z' = (x + x', y + y')$ et $zz' = (xx' - yy', xy' + x'y)$.
- On note $i = (0, 1)$, couple tel que $i^2 = (-1, 0)$.
- On se permet de noter x le nombre $(x, 0)$ pour x réel.
- **En pratique**, On notera $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$.
- Les calculs avec les lois $+$ et $\times$ se passent "comme dans $\mathbb{R}$ " en utilisant $i^2 = -1$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatifs

■ La loi $+$ est associative et commutative :

$$\blacksquare \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$$

$$\blacksquare \forall z, z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z.$$

■ La loi $\times$ est associative et commutative :

$$\blacksquare \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z''),$$

$$\blacksquare \forall z, z' \in \mathbb{C}, z \times z' = z' \times z$$

■ La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$:

$$\blacksquare \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$$

■ 0 est un élément neutre de $+$ sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$.

■ 1 est un élément neutre de $\times$ sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$.

■ Tout élément est symétrisable pour la loi $+$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists ! z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = 0.$$

On note alors $z' = -z$.

■ Tout élément non nul est symétrisable pour la loi $\times$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \exists ! z'' \in \mathbb{C} \mid z \times z'' = 1.$$

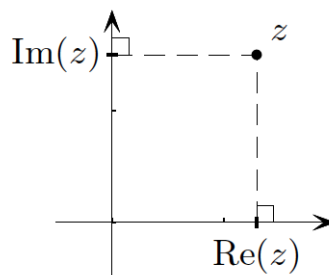
On note alors $z'' = z^{-1} = \frac{1}{z}$.

1) PARTIE RÉELLE, IMAGINAIRE

Partie réelle, imaginaire

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = \Re z + i \Im z$$

- $\Re z \stackrel{\text{def}}{=} \text{partie réelle de } z$.
- $\Im z \stackrel{\text{def}}{=} \text{partie imaginaire de } z$.
- $z \stackrel{\text{def}}{=} \text{est l'affixe du point } M(\Re z, \Im z)$.
- Le point $M(\Re z, \Im z)$ est l'image du nombre complexe z



Linéarité de $\Re$, et $\Im$

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $z = z' \iff (\Re(z) = \Re(z') \text{ et } \Im(z) = \Im(z'))$
- $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z'), \quad \Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$
- $\Re(\alpha z) = \alpha \Re(z) \text{ et } \Im(\alpha z) = \alpha \Im(z)$
- $\forall z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \quad \Re\left(\sum_{i=0}^n z_i\right) = \sum_{i=0}^n \Re(z_i) \text{ et } \Im\left(\sum_{i=0}^n z_i\right) = \sum_{i=0}^n \Im(z_i)$



Formule du binôme de Newton

$$\forall n \in \mathbb{N}, (z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

2) CONJUGUÉ, MODULE, ARGUMENT

Définitions

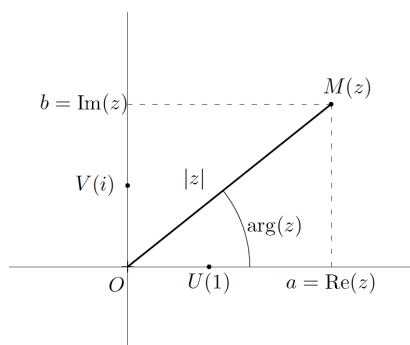
Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Le **conjugué** de z est le nombre complexe $\bar{z} = \Re z - i \Im z$
- Le **module** de z est le nombre complexe

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\Re^2(z) + \Im^2(z)}$$

- Si $z \in \mathbb{C}^*$, un **argument** de z , noté $\arg(z)$, est un nombre réel θ tel que :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$$



- L'ensemble des arguments de z est : $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- L'argument principale de $z \stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'unique argument de } z \text{ appartenant à l'intervalle }]-\pi, \pi]$.

Exemple

Déterminer module et argument de $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.



Propriétés

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

■ Propriétés du conjugué

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \overline{z'}$
- si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\forall z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\overline{\sum_{i=0}^n z_i} = \sum_{i=0}^n \overline{z_i}$ et $\overline{\prod_{i=0}^n z_i} = \prod_{i=0}^n \overline{z_i}$
- $\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

■ Propriétés du module

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\Re(z)| \leq |z|$, et $|\Im(z)| \leq |z|$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $|z^k| = |z|^k$
- $|\overline{z}| = |z|$
- si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

■ Propriétés des arguments

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, alors :

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \equiv \arg \bar{z} [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$
- $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^p) \equiv p \cdot \arg z [2\pi]$

$$\begin{array}{llllll} z \in \mathbb{R} & \iff & \Im(z) = 0 & \iff & z = \overline{z} & \stackrel{z \neq 0}{\iff} & \arg(z) \equiv 0[\pi] \\ z \in i\mathbb{R} & \iff & \Re(z) = 0 & \iff & z = -\overline{z} & \stackrel{z \neq 0}{\iff} & \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{array}$$

Exercice

Soit a et b de module 1 et $z \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\Re\left(\frac{z + ab\bar{z} - a + b}{a - b}\right) = -1$$







Inégalité triangulaire

■ Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ alors on a les propriétés suivantes :

$$||z| - |z'||| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

■ $\forall z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C},$

$$\left| \sum_{i=0}^n z_i \right| \leq \sum_{i=0}^n |z_i|$$



Preuve

Exercice

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z' = \lambda \cdot z$$



Preuve

[illegible]

Exercise

Montrer pour $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

1. $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.
2. $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$.



Preuve

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Disque ouvert, fermé

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^*$.

- **Le disque fermé** de centre a et de rayon r :

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leq r\}$$

- **Le disque ouvert** de centre a et de rayon r :

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| < r\}$$

- **Le cercle** de centre a et de rayon r :

$$\mathcal{C}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| = r\}$$

4) LES NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

 **Le groupe** $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}, \quad z_1 \times z_2 \in \mathbb{U},$
- $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{U}^3, \quad z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3,$
- $\forall z \in \mathbb{U}, \quad z \times 1 = 1 \times z = z,$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{U} \iff \frac{1}{z} = \overline{z}$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}, \quad z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1.$

On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif, appelé groupe des nombres complexes de module 1.

 **L'exponentielle imaginaire** $e^{i\theta} \stackrel{\text{déf}}{=} \cos \theta + i \sin \theta$

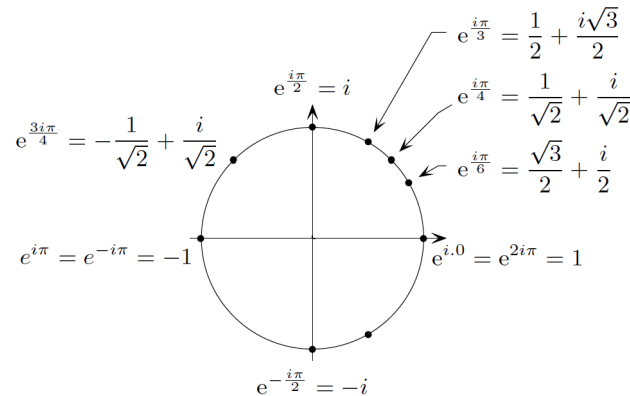
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{U} \iff (\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta})$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{U} \iff \overline{z} = \frac{1}{z}$
- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{cases} \quad r, r' > 0$



$$\blacksquare |e^{i\theta}| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\blacksquare e^{i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi$$

$$\blacksquare e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$$



Remarques

$$\blacksquare \mathbb{U} = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$$

■ L'exponentielle imaginaire est un morphisme de groupes

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}, \times) \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$$



Formules importantes

Formules d'Euler :

$$\blacksquare \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\blacksquare \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Technique de l'angle moitié :

$$\blacksquare e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\blacksquare e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

$$\blacksquare e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\blacksquare 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

■ **Formule de Moivre :** Soient $n \in \mathbb{Z}$, et $\theta \in \mathbb{R}$



$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $ab \neq -1$, montrer que :

$$\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Applications

Soient $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

- Exprimer $\cos(n\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$. On trouvera $\cos(n\theta) = P(\cos \theta)$ où P est un polynôme de la forme suivante :

$$P(X) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1-X^2)^k$$

- Montrer que

$$\sin n\theta = \sin \theta \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-(2k+1)} \theta (1 - \cos^2 \theta)^k$$

- Linéariser $\sin^3(x) \cos^2(x)$

5) EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Exponentielle d'un nombre complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{\Re z} e^{i \Im z}$$



Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\blacksquare e^z \neq 0; \quad |e^z| = e^{\Re(z)} \quad \text{et} \quad \arg(e^z) \equiv \Im(z) [2\pi]$$

$$\blacksquare e^z = e^{z'} \iff (\Re(z) = \Re(z') \text{ et } \Im(z) \equiv \Im(z') [2\pi])$$



Propriétés

$$\blacksquare \exp: \begin{cases} (\mathbb{C}, +) & \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \longmapsto e^z \end{cases} \text{ est un morphisme de groupes}$$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

$$\blacksquare \forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

$$\blacksquare \forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (e^z)^k = e^{kz}$$

$$\blacksquare \forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

■ L'ensemble des solutions de l'équation $e^z = \omega$:

$$\forall \omega \in \mathbb{C}^*, \quad e^z = \omega \iff \begin{cases} \Re(z) = \ln |\omega| \\ \Im(z) \equiv \arg(\omega) [2\pi] \end{cases}$$

$$\{\ln |\omega| + i \arg(\omega) + 2ik\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$



Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $e^z = 1$

2) $e^z = 2i$

3) $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$

Preuve

.....

.....

.....

.....



■ $\exp\left(\sum_{k=0}^n z_k\right) = \prod_{k=0}^n e^{z_k}$

■ $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$

6) NOMBRES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE

Soient A, B, C, D des points distincts deux à deux d'affixes respectifs a, b, c, d

■ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$

■ $AB = |b - a|$

■ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) [2\pi]$

■ $(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ A, B, C sont alignés

$$\begin{aligned}
 &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi] \\
 &\iff \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0[\pi] \\
 &\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \\
 &\iff (c-a)(\bar{b}-\bar{a}) \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

■ (AB) // (CD)

$$\begin{aligned}
 &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0[\pi] \\
 &\iff \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0[2\pi] \\
 &\iff \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \\
 &\iff (d-c)(\bar{b}-\bar{a}) \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

■ (AB) $\perp$ (CD)

$$\begin{aligned}
 &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\
 &\iff \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\
 &\iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R} \\
 &\iff (c-a)(\bar{b}-\bar{a}) \in i\mathbb{R}
 \end{aligned}$$

■ A, B, C et D (non alignés) sont cocycliques

$$\begin{aligned}
 &\iff (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv 0[\pi] \\
 &\iff \arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) [\pi] \\
 &\iff \frac{d-a}{c-a} \div \frac{d-b}{c-b} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans les deux cas suivants :

1. $M(z)$, $A(z^2)$, $B(z^3)$ sont alignés.
2. Le triangle ABM est rectangle en M .





Applications 1 : Équation complexe d'une droite

- Déterminer une équation complexe d'une droite $\mathcal{D}$ passant par deux points distincts A, B .





Exemple

Déterminer une équation complexe de la médiatrice Δ du segment $[A, B]$.





Applications 2 : Équation complexe d'un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$

■ Déterminer une équation complexe du cercle $\mathcal{C}(\Omega(\omega), R)$.





Exercice

Déterminer l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C}, |z - 4| = \sqrt{2}|z - 1|\}$



7) RACINES n -IÈME DE L'UNITÉ

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

$z \in \mathbb{C}$ est une **racine n -ième de l'unité** $\stackrel{\text{déf}}{\iff} z^n = 1$

Notation : On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ième de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

Déterminer les racines n-ième de l'unité.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$$

Si on note $\omega = e^{i \frac{2\pi}{n}}$. Alors :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

Il y a exactement n racines n -èmes de l'unité deux à deux distinctes.

Propriétés des racines n-ième de l'unité

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

■ $(\omega^k)^n = \dots\dots\dots$

■ $\overline{\omega^k} = \dots\dots\dots$

■ $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \dots\dots\dots$

■ $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \dots\dots\dots$

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \dots\dots\dots \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \dots\dots\dots$$



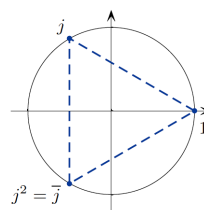
Propriétés de $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$



■ $j^3 = \dots\dots\dots$

■ $\bar{j} = \dots\dots\dots$

■ $1 + j + j^2 = \dots\dots\dots$



Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^5 - (z+1)^5 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-i)^n = (z+i)^n$







Application : Factorisation de $P(z) = z^n - 1$, $n \geq 2$

$$\blacksquare z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n}) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z - \omega)$$

$$\blacksquare \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n}) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (z - \omega)$$

Exemple

$$z^3 - 1 =$$

$$z^5 - 1 =$$

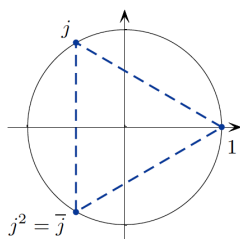
$$z^7 - 1 =$$

$$z^8 - 1 =$$

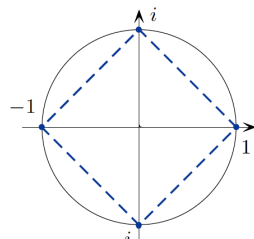


Interprétation géométrique

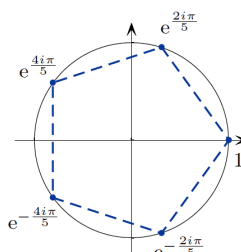
■ Les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle unité.



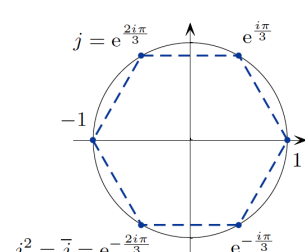
$\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral.



$\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets des sommets d'un carré.



$\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier.



$\mathbb{U}_6$ est l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier.



8) RACINES n -IÈME D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Définition

Soient $Z = Re^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$z \in \mathbb{C}$ est une **racine n -ième** de Z $\stackrel{\text{déf}}{\iff} z^n = Z$

NB : Chercher les **racines n -ième** de Z , c'est résoudre l'équation $z^n = Z$.



Conclusion

L'équation complexe $z^n = Z$ admet n racines distinctes. Son ensemble solution est donné par :

$$\begin{aligned} S_n &= \left\{ z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\frac{\alpha}{n}} \times \omega^k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} \text{ avec } \omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{aligned}$$

■ **Factorisation de $z^n - Z$:** $\forall z \in \mathbb{C}, z^n - Z = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$



En particulier

Soient $Z = R e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$

- Les deux **racines carrées** de Z sont :

$$z_0 = \sqrt{R} e^{i\frac{\alpha}{2}}, \quad z_1 = -\sqrt{R} e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

- Les trois **racines cubiques** de Z sont :

$$z_0 = \sqrt[3]{R} e^{i\frac{\alpha}{3}}, \quad z_1 = \sqrt[3]{R} e^{i\frac{\alpha}{3}} j, \quad z_2 = \sqrt[3]{R} e^{i\frac{\alpha}{3}} j^2$$

Exemple

Calculer les racines cinquièmes de j et $\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$.



Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$a) (z+i)^3 = 8i$$

$$b) (z+2)^4 = 4\sqrt{2}(1+i)$$

$$c) z^6 - 1 = i$$



Exemple

$$z^4 + 1 =$$

$$z^5 - j =$$

$$z^6 - 1 - i =$$

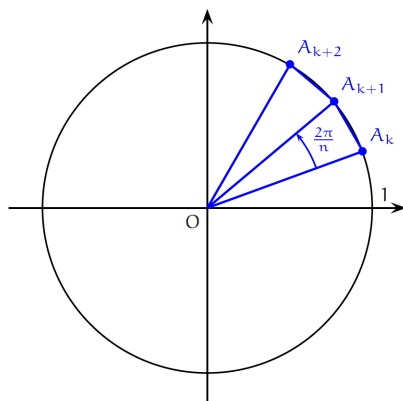
$$(z+2)^4 - 4 =$$



Interprétation géométrique

Soit $Z = Re^{i\alpha}$.

Les racines n -ièmes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ de Z sont les affixes des sommets $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle du centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$.





9) ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENT COMPLEXES.

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } a \neq 0$$

On introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.



■ **Cas 1 :** Si $\Delta = 0$:

- **Unique solution :**
- **Factorisation :**

■ **Cas2 :** Si $\Delta \neq 0$:

- **Deux solutions :**
- **Factorisation :**

■ **Cas particulier :** Si $\Delta < 0$, avec (a, b, c) sont réels :

- **Deux racines complexes conjuguées :**
- **Factorisation dans $\mathbb{C}$:**

Exemple

Résoudre l'équation complexe suivante : $z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$.



Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 13i \end{cases}$$



10) SIMILITUDES & ISOMÉTRIES

- Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, e_1, (e_2))$,
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$.
- $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une transformation géométrique du plan associée à f signifie :

$$z' = f(z) \iff M'(z') = F(M(z))$$

Exemples

La transformation géométrique associée à l'application $f : z \mapsto \bar{z}$ est symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Définition

L'application f est dite similitude directe de rapport $\lambda > 0$ si :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |f(z) - f(z')| = \lambda |z - z'|$$

En particulier : $\lambda = 1$ f est dite isométrie :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |f(z) - f(z')| = |z - z'|$$



Remarques

- Si f est une similitude de rapport $\lambda > 0$, alors :

$$F(M)F(N) = \lambda MN$$

- Les isométries préservent les distances. $F(M)F(N) = MN$.
- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports de celles-ci.
- Il est clair que toute similitude est injective.

Théorème

Toutes les similitudes planes sont les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$f : z \mapsto az + b \quad \text{ou} \quad f : z \mapsto a\bar{z} + b$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$.

 Preuve

10)INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $f : z \mapsto az + b$