CHP4 : LES APPLICATIONS

1. Qu'est ce qu'une application ?

Définition

Soient E, F deux ensembles .

■ **Une application** f de E dans F associe à tout élément x de E un unique image $y = f(x)$ de F . On note :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

On dit que E est **l'ensemble de départ** et F **l'ensemble d'arrivée** de f.

■ L'ensemble $\mathbf{G} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F},\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$ est appelée **le graphe** de l'application f.

■ On note $\mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ l'ensemble des **applications** de E vers F .

Remarques

■ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est une application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

■ **En général** , Une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de l'ensemble F est une application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ i & \longmapsto & f(i) = x_i \end{array}$$

Applications usuelles

Soient $f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \times \mathscr{F}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$

■ **L'application identité :** $id_{\mathrm{E}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & id_{\mathrm{E}}(x) \overset{\text{déf}}{=} x \end{array} \right.$

■ **Fonction indicatrice** d'une partie A de E .

$$\chi_{\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \rightarrow & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathrm{A}}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \mathrm{A} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathrm{A} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Etablir que : $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.
2. Montrer que : $\chi_A \times \chi_A = \chi_A$.
3. Démontrer que : $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$.
4. Etablir que : $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.
5. On pose : $C = A\setminus B$. Démontrer que : $\chi_C = \chi_A \times (1 - \chi_B)$.

Pour montrer que $f = g$

Soient $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications

$$f = g \overset{\text{déf}}{\iff} \forall x \in E, f(x) = g(x)$$

Définition :Composée de deux applications

Soient $f, g \in \mathscr{F}(E,F) \times \mathscr{F}(F,G)$

L'application composée : $gof : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gof(x) \overset{\text{déf}}{=} g(f(x)) \end{array} \right.$

Remarques

- Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On a : $id_F of = f o\, id_E = f$
- Sous reserve d'existence : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (fog)oh = fo(goh) = fogoh \\ \bullet gof \neq fog \text{ en général} \end{array} \right.$

Définition :Restriction ,prolongement

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application

- La restriction de $f \in \mathscr{F}(E,F)$ sur une partie A de E noté $f_{/_A}$

$$f_{/_A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f_{/A}(x) = f(x) \end{array} \right.$$

- Inversement f est un prolongement de $f_{/_A}$.

Exemple

- La restriction du module sur $\mathbb{R}$ de $\begin{array}{|llll} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & |z| \end{array}$

  est la fonction valeur absolue $\begin{array}{|llll} f_{|\mathbb{R}}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$

- $\begin{array}{|llll} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}$ admet un prolongement sur $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{|llll} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

2. Image directe, Image réciproque

Définition :Image directe

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application , $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$

- **L' image directe** de A par f :

$$f(\mathrm{A}) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f(x) / \quad x \in \mathrm{A}\}$$

- En particulier **l' image** de f :

$$\mathrm{I}m(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f(x) / \quad x \in \mathrm{E}\} = f(\mathrm{E})$$

Remarque

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application ,

- $f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$
- $y \in f(\mathrm{A}) \iff \exists x \in \mathrm{A}, \ \ y = f(x)$
- $x \in \mathrm{A} \implies f(x) \in f(\mathrm{A})$
- $f(\{x_1, \dots, x_n\}) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$

Méthode : Pour montrer que $y \in f(\mathrm{A})$:

Chercher $x \in \mathrm{A}$ tel que $y = f(x)$

Exemple

On considère l'application : $\begin{array}{|llll} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x-4\sqrt{x}+1 \end{array}$

1. Déterminer $f([0,4])$
2. Montrer que : $f(]1,+\infty[)=]-3,+\infty[$

Propriétés

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $A, B \in \mathscr{P}(E)$:

- $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Remarque

En général : $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$,par exemple : $\begin{array}{|llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

$A = \mathbb{R}^+, \quad B = \mathbb{R}^-$

Définition :Image réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application , $B \subset F$

- **Image réciproque** de B par f :

$$f^{-1}(B) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E / \quad f(x) \in B\}$$

On a donc

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Remarque

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(F) = E$
- $f^{-1}(\{a\}) = \{x \in E, \quad f(x) = a\}$,
- $f^{-1}(B) = \emptyset$ ne signifie pas que $B = \emptyset$

Méthode : Pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$:

Calculer $f(x)$ et vérifie que $f(x) \in B$

Exemple

On considère l'application : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^*+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$

1. Déterminer $f^{-1}(]1,2])$
2. Déterminer $f^{-1}(]0,1])$

Propriétés

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $A, B \in \mathscr{P}(F)$:

- $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- $f^{-1}\left(\complement_F B\right) = \complement_E\left(f^{-1}(B)\right)$

3. Injectivité, Surjectivité,Bijectivité

Définition :Injectivité

- **Une application** $f : E \longrightarrow F$ est dite **injective** si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

- **Par contraposée :** $f : E \longrightarrow F$ est **injective** si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

Méthode : Pour montrer que f est injective

Soient $x \in E$ et $y \in E$. Supposons que $f(x) = f(y)$.
Montrons que $x = y$
.
.
.
Alors $x = y$

Exemple

Étudier l'injectivité des applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^3 - n \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & n + (-1)^n \end{array}$$

Définition :Surjectivité

On dit que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est **surjective** si elle vérifie l'une des trois propriétés **équivalentes** suivantes :

- Tout élément $y \in \mathrm{F}$, admet au moins un antécédent par f .
- Pour tout $y \in \mathrm{F}$,l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution $x \in \mathrm{E}$.
- Pour tout $y \in \mathrm{F}$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.

Exemple

Étudier la surjectivité des applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

Caractérisation de la surjectivité

$$f \text{ est surjective de E vers F} \iff f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$$

Exemple

On considère l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* + \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} \end{array}$

L'application f est-elle surjective ?

Composée d'injections, surjections

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux applications. Alors :

- Si f et g sont injective, alors $g \circ f$ aussi .
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi .
- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective .
- si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective .

Définition : Bijectivité

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application ,

$$f \text{ est bijective de E vers F} \iff (\forall y \in \mathrm{F}),\ (\exists! x \in \mathrm{E}),\ y = f(x) \iff f \text{ est } \textbf{injective} \text{ et } \textbf{surjective}$$

Exemple

La fonction $x \longmapsto x^2$ est :

- **surjective** si elle est vue comme fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.
- **injective** si elle est vue comme fonction $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.
- **bijective** si elle est vue comme fonction $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$.
- ni injective ni surjective si $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Caractérisation de la bijectivité :Bijection réciproque

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application.

■ f est **bijective** de E vers F $\iff$ Il existe $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$

Dans ce cas ,on note $g = f^{-1}$ la **bijection réciproque** de f.

Exemple

L'identité de E est une bijection de E dans E .

Remarques :

Si f est bijective ,

- ■ $(\forall x \in \mathrm{E}),\ (\forall y \in \mathrm{F}),\ [y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)]$
- ■ $(\forall x \in \mathrm{E}),\ f^{-1} o f(x) = x$ ■ $(\forall x \in \mathrm{F}),\ f o f^{-1}(x) = x$
- ■ $\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F},\quad f^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{B})$

En pratique : Comment montrer $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est bijective?

■ **Méthode 1 :**

Montrer que pour tout $y \in \mathrm{F}$,l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in \mathrm{E}$.

■ **Méthode 2 :** Montrer que f est injective et surjective .

Méthode 3 : Trouver une bijection réciproque .

Chercher une application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$.

Composée de bijections

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux applications.

Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(k) = 2k, \qquad\qquad g(k) = \begin{cases} k/2 & k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & k \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
2. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
   Étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice

Soient E un ensembles non vide et $h : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application.

1. On considère l'application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ définie par : $f = hoh$.
   (a) Montrer que
   $$f \text{ surjective} \Longrightarrow h \text{ surjective.}$$
   (b) Montrer que
   $$f \text{ injective} \Longrightarrow h \text{ injective.}$$
2. Soient les applications φ et ψ :
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad\qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & |n-1| \end{array}$$
   (a) Les applications φ et ψ ci-dessus sont-elle injectives ? Surjectives ? Bijectives ? Justifier chacune de vos réponses.
   (b) Déterminer la composée $\varphi o \psi$; cette application est-elle bijective ?

Python