

CHP3 : LES ENSEMBLES

1. Opérations sur les ensembles

Définition

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

■ L'intersection

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

■ La réunion

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

■ La différence de A et B

$$x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B)$$

■ La différence symétrique

$$x \in A \Delta B \iff (x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A)$$

■ Le complémentaire de A dans E

$$x \in \bar{A} \iff x \in E \text{ et } x \notin A$$



Propriétés

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

■ Complémentaire :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= A, \quad \bar{E} = \emptyset, \quad A \cup \bar{A} = E, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset. \\ A \subseteq B &\iff \bar{B} \subseteq \bar{A}. \end{aligned}$$

■ Intersection :

$$\begin{aligned} A \cap A &= A, \quad A \cap E = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset. \\ A \cap B &= B \cap A \text{ et } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cap B &= \emptyset \iff A \subseteq \bar{B} \text{ et } A \cap B = A \iff A \subseteq B. \\ A \subseteq B &\implies (A \cap C) \subseteq (B \cap C) \end{aligned}$$

■ Réunion :

$$\begin{aligned}
 A \cup A &= A, A \cup E = E, A \cup \emptyset = A \\
 A \cup B &= B \cup A \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
 A \cup B = E &\iff \bar{A} \subseteq B \quad \text{et} \quad A \cup B = B \iff A \subseteq B \\
 A \subseteq B &\implies (A \cup C) \subseteq (B \cup C)
 \end{aligned}$$

■ Réunion et intersection :

$$\begin{aligned}
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
 \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \\
 \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\
 A \subseteq (B \cap C) &\implies (A \subseteq B \quad \text{et} \quad A \subseteq C) \\
 (A \cup B) \subseteq C &\implies (A \subseteq C \quad \text{et} \quad B \subseteq C) \\
 A \cap B &\subseteq B \quad \text{et} \quad A \subseteq (A \cup B)
 \end{aligned}$$

■ Différence symétrique :

$$\begin{aligned}
 A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\
 A \Delta A &= \emptyset, A \Delta \emptyset = A, A \Delta E = \bar{A} \\
 A \cap (B \Delta C) &= (A \cap B) \Delta (A \cap C). \\
 A \Delta B &= B \Delta A, A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C
 \end{aligned}$$

 Preuve

2. L'inclusion et l'égalité

Définition

Pour A et B deux parties d'un ensemble E .

$$\begin{aligned}
 A \subseteq B &\iff [(\forall x \in E), x \in A \implies x \in B] \\
 A = B &\iff A \subseteq B \quad \text{et} \quad B \subseteq A \\
 &\iff [(\forall x \in E), x \in A \iff x \in B]
 \end{aligned}$$

Pour montrer « $A \subseteq B$ »

Montrer que $\forall x \in E, x \in A \implies x \in B$

Dans ce cas, on rédige souvent comme suit :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } x \in A \\ \text{Montrons que } x \in B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Donc } x \in B \end{array} \right.$

Exemple

Soit E un ensemble non vide.

Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$



.....

.....

.....

.....



Remarques

- $A \not\subseteq B \iff \exists x \in A, x \notin B$
- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E .

Pour montrer « $A = B$ »

- **Méthode 1** : Par double inclusion, $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$
- **Méthode 2** : $(\forall x \in E), x \in A \iff x \in B$
- **Méthode 3** : Opérations sur les ensembles

- | | |
|--|--|
| • $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | • $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| • $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ | • $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ |
| • $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ | |

- **Méthode 4** : Fonction caractéristique.

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow (\forall x \in E), \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \\ A = B &\Leftrightarrow \chi_A = \chi_B \end{aligned}$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{array} \right\} \iff B = \overline{A}$$

EXERCICE 2

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble non vide E. Montrer que :

■ $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

■ $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

EXERCICE 3

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble non vide E. Montrer que :

■ $A = B \iff A \cap B = A \cup B$

■ $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \iff A \cap B = A \cap C.$

■ $\left. \begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array} \right\} \iff B = C.$

■ $A \cup B = A \cap C \iff B \subseteq A \subseteq C.$

EXERCICE 4

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble non vide E. Montrer que :

■ $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

■ $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

EXERCICE 5

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble non vide E. Montrer que :

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

**Propriétés liées aux unions et intersections infinies**

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, et $B \subseteq E$:

■ $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$

■ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$

■ $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

■ $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

■ $\complement_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\complement_E A_i)$

■ $\complement_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\complement_E A_i)$

**Preuve**

.....

.....

.....

.....



Définition : Partition d'un ensemble

Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties non vides de E .

$\{A_1, \dots, A_n\}$ est **une partition** de E si :

- $E = A_1 \cup \dots \cup A_n$.
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

Dans ce cas :

$$\forall B \in \mathcal{P}(E), \quad B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$$

Définition : Produit cartésien

Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble noté $E \times F$:

$$E \times F = \{(a, b) / a \in E \text{ et } b \in F\}$$

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement $E^n = E \times E \times \dots \times E$.



propriétés du produit cartésien

Soit E, F et G des ensembles Alors :

- $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset) \text{ ou } (F = \emptyset)$.
- $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$.
- $(E \cap F) \times G = (E \times G) \cap (F \times G)$.