APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. L'ensemble des applications linéaires $\mathscr{L}(E, F)$

1.1) Qu'est ce qu'une application linéaire ?

DÉFINITION

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si :

$$\begin{cases} \blacksquare \quad \forall x, y \in E, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \blacksquare \quad \forall x, \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

- On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des **applications linéaires** de E vers F.

Vocabulaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que f est un :

- **Isomorphisme si** f est bijective. On note $f \in \mathbf{GL}(E, F)$.
- **Endomorphisme si** $E = F$. On note $f \in \mathscr{L}(E)$.
- **Automorphisme si** $E = F$ et f bijective. On note $f \in \mathbf{GL}(E)$.
- **Forme linéaire si** $F = \mathbb{K}$. On note $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Deux endomorphismes usuels

- $\theta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{array}$
- $id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Autre définition pratique

$$f \in \mathscr{L}(E,F) \iff (\forall x, y \in E),\ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}),\quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Exemples

Les applications suivantes sont des applications linéaires :

- $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$
- $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array}$
- $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz \end{array}$
- $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA - A \end{array}$
- $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & v \end{array}$
- $\varphi_6 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' - 2f' + f \end{array}$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = u_{n+1} - 2u_n$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarques

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors :

$$\boxed{f(0_E) = 0_F}$$

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}$$

Exemples

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])$ tel que :

$$f(1) = 0, f(X) = 1, f(X^2) = 2X, \ldots\ldots, f(X^n) = nX^{n-1}$$

$f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.2) Noyau,Image d'une application linéaire

Proposition :Image directe -Image réciproque

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$

- ■ A sev de E $\Longrightarrow$ $f(A)$ est un sev de F
- ■ B sev de F $\Longrightarrow$ $f^{-1}(B)$ est un sev de E

Preuve

....

....

....

....

....

....

DÉFINITION

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire

- **L' image** de f :

$$\mathrm{I}m(f) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ f(x) / \quad x \in \mathrm{E} \right\} = f(\mathrm{E})$$

- **Le noyau** de f :

$$\mathrm{K}er(f) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathrm{E} / \quad f(x) = 0_{\mathrm{F}} \right\}$$

Remarques

- $y \in \mathrm{I}m f \Longleftrightarrow$ ....
- $x \in \mathrm{K}er f \Longleftrightarrow$ ....
- $\mathrm{K}er f \subset$, $\mathrm{I}m f \subset$

Corollaire

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$

- $\mathrm{K}er f$ est un **sous-espace vectoriel** de E.
- $\mathrm{I}m f$ est un **sous-espace vectoriel** de F.

Preuve

....

....

Exemples

- $\mathrm{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / ax + by + cz = 0 \right\}$ est un **s.e.v** de $\mathbb{K}^3$

....

- $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tA = A\}$ est un **s.e.v** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

  ....

- $H = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R}) / \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$ est un **s.e.v** de $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$

  ....

- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y+3z=0 \quad \text{et} \quad 2x+3y+2z=0\}$ est un **sev** de $\mathbb{R}^3$

  ....

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

- f est **injective** $\iff ker(f) = \{0_E\}$
- f est **serjective** $\iff Im(f) = F$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Exemple

- Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-2y) \end{array} \right.$

....

....

....

....

....

EXERCICE

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$

1. f est-elle injective ?
2. Montrer que f est surjective .

Solution

....

....

....

....

....

....

....

■ Sous réserve d'existence : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ ho(\alpha f+\beta g)=\alpha hof+\beta hog \\ \\ \bullet\ (\alpha f+\beta g)oh=\alpha foh+\beta goh \end{array} \right.$

Remarque

Les deux applications suivantes sont linéaires .

■ $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(G,F) \\ f & \longmapsto & foh \end{array}$ ■ $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(F,E) \\ f & \longmapsto & hof \end{array}$

Preuve

....

....

....

Remarques

- $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ (id_{\mathrm{F}})of = fo(id_{\mathrm{E}}) = f$
- $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}), \forall g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \ : \ \begin{cases} \bullet\ ker f \subset kergof \\ \bullet\ \mathrm{Im} gof \subset \mathrm{Im} g \end{cases}$
- $\forall f,g \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$
- $f \in \mathbf{GL}(\mathrm{E}) \iff \exists g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\ gof = id_{\mathrm{E}}$ et $fog = id_{\mathrm{E}}$
- $f \in \mathbf{GL}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \iff \exists g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}),\ gof = id_{\mathrm{E}}$ et $fog = id_{\mathrm{F}}$
- $f \in \mathbf{GL}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ g \in \mathbf{GL}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \implies gof \in \mathbf{GL}(\mathrm{E},\mathrm{G}).$ $\qquad (gof)^{-1} =$

....

....

....

....

....

....

....

EXERCICE

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère f et g deux éléments de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que Ker f et Im f et sont stables par g.
2. On suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f + \ker g$. Montrer que $g \circ f = 0$.

Solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Formules de calcul dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$

$$f^n \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \underbrace{fof\ldots\ldots of}_{n fois} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ \mathrm{I}d_{\mathrm{E}} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

- $(\mathscr{L}(\mathrm{E}), +, o)$ ....

Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $fog = gof$

- **Binôme de Newton :** $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^k o g^{n-k}$
- **Factorisation :** $f^n - g^n = (f-g)o(f^{n-1} + f^{n-2}og + \ldots\ldots + g^{n-1})$
- **En particulier :** $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - g^n = (\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - g)o(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} + g + \ldots\ldots + g^{n-1})$

EXERCICE

Soient $f, g, h \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $f = 3id_{\mathrm{E}} + g$, et $g^2 = 0$.

1. Déterminer pour tout entier naturel n non nul f^n
2. Si h est nilpotent ,montrer que $id_{\mathrm{E}} - h$ est un automorphisme de E et exprimer sa réciproque .

Solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

DÉFINITION : POLYNÔME D'ENDOMORPHISME $f \in \mathscr{L}(E)$

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

- $P(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_0 id_E + a_1 f + \ldots\ldots a_n f^n \in \mathscr{L}(E)$
- P **polynôme annulateur de** f $\overset{\text{déf}}{\iff}$ $P(f) = 0$

Remarques

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathscr{L}(E)$

- $f^{n+m} = f^n o f^m$ ■ $f^n o f^m = f^m o f^n$ ■ $f o P(f) = P(f) o f$

$$\begin{cases} P(f) = a_0 id_E + a_1 f + \ldots\ldots a_n f^n = 0 \\ a_0 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathbf{GL}(E) \\ f^{-1} = \end{cases}$$

EXERCICE

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que : $f^2 = 2f + 3id_{\mathrm{E}}$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer son inverse .
2. Déterminer f^n en fonction de f

Solution

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriétés

Soit $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$

- $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(f) = \mathrm{P}(f) + \mathrm{Q}(f)$
- $\mathrm{P}(f) o \mathrm{Q}(f) = \mathrm{Q}(f) o \mathrm{P}(f)$
- $(\mathrm{PQ})(f) = \mathrm{P}(f) o \mathrm{Q}(f)$

2. Endomorphismes usuels

2.1) Projection vectorielle

DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}$−ev et F, G deux **sev supplémentaires** dans E , $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$

Ainsi ....

- On appelle **projection vectorielle sur** F **parallélement** à G ,l'application

$$p : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & p(x) = x_{\mathrm{F}} \end{array}$$

Graphiquement

Proposition

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$

$$p \text{ **projection sur** } F \text{ **parallélement** à } G \iff \begin{cases} \blacksquare \quad \forall x \in F \quad p(x) = x \\ \blacksquare \quad \forall x \in G \quad p(x) = 0 \end{cases}$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Exemples

On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array}$$

est la projection sur ....parallèlement à ....

EXERCICE

Soit F et G deux sev de $E = \mathbb{R}_2[X]$ définis comme suit :

$$F = \{bX + cX^2 / \ (b,c) \in \mathbb{R}^2\} \ \text{ et } \ G = \{a + aX / \ a \in \mathbb{R}\}$$

On admet que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.On note p la projection sur F parallèlement à G
Déterminer $p(1+2X+X^2)$, $p(2+X^2)$, $p(1-X)$

Solution

....

....

....

....

....

Propriété d'une projection

Soit p une projection sur F suivant G .Alors :

- p est un endomorphisme $(p \in \mathscr{L}(E))$
- $pop = p$
- $ker\, p = G \quad , \quad Imp = F$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition

Soit E un $\mathbb{K}-$ev

p est dit **projecteur** de E $\overset{déf}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} p \in \mathscr{L}(E) \\ pop = p \end{cases}$

Remarques

Si p est un projecteur de E ,alors

- $\forall x \in \mathrm{E},\ x - p(x) \in ker(p)$
- $\forall x \in \mathrm{I}m(p),\ p(x) = x$

Proposition

Si p est un projecteur de E ,alors

$$\mathbf{E} = \mathbf{kerp} \oplus \mathbf{Imp}$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarques

- Une projection sur F parallélement à G est un projecteur .
- Un projecteur p est une projection sur **Imp** parallélement à **kerp**.

2.2) Symétrie vectorielle

DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}-$ev et F, G deux **sev supplémentaires** dans E , $E = F \oplus G$

- On appelle **Symétrie vectorielle** par rapport à F **parallélement** à G ,l'application

$$\begin{array}{rccc} s: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & s(x) = x_F - x_G \end{array}$$

Graphiquement

Proposition

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$

s est la **symetrie** par rapport à F **parallélement** à G si et seulement si,

$$\begin{cases} \blacksquare \quad \forall x \in F \quad s(x) = x \\ \blacksquare \quad \forall x \in G \quad s(x) = -x \end{cases}$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Exemple

On note $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \end{array}$$

est la symétrie par rapport à..................parallèlement à ....

Propriété d'une projection

Soit s une symétrie par rapport à F suivant G ,alors

- s est un endomorphisme ($s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$)
- $sos = id_{\mathrm{E}}$
- $\mathrm{F} = ker(s - id_{\mathrm{E}})$, $\mathrm{G} = ker(s + id_{\mathrm{E}})$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$−ev

$$s \text{ est dit } \textbf{symétrie} \text{ de E} \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} s \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \\ sos = id_{\mathrm{E}} \end{cases}$$

Remarques

Si s est une symétrie de E ,alors

- s est automorphisme de E et $s^{-1} = \ldots\ldots$
- $\forall x \in ker(s - id_E),\ s(x) = \ldots\ldots$
- $\forall x \in ker(s + id_E),\ s(x) = \ldots..$

EXERCICE

Soit p un projecteur de E .Vérifier que $2p - id_E$ et une symétrie de E.

Solution

....

....

....

....

Proposition

Si s est une symétrie de E ,alors

$$\mathbf{ker}(\mathbf{s} - \mathbf{id_E}) \oplus \mathbf{ker}(\mathbf{s} + \mathbf{id_E}) = \mathbf{E}$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarques

- Une symétrie par rapport à F parallélement à G est une symétrie de E .
- Une symétrie s est est la symétrie par rapport à $ker(s - id_E)$ suivant $ker(s + id_E)$.
- $p = \dfrac{1}{2}(s + id_E)$ est le projecteur sur $ker(s - id_E)$ suivant $ker(s + id_E)$.

EXERCICE

Soient p et q deux projecteurs d' un espace vectoriel E, tels que $p \circ q = 0$.
On pose que $r = p + q - q \circ p$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....