

# MATRICES & APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1. Matrice de vecteurs, d'applications linéaires

### 1.1) Matrice d'une famille de vecteurs.



#### DÉFINITION

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .  
Soit  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

■ La matrice de la famille  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) =$$

■ **En particulier :** La matrice d'un seul vecteur  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) =$$



#### Remarque

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}$$

**NB :** Parfois, on confond  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$



### Exemple

Dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs suivants

$$v_1 = e_1 - 2e_2, \quad v_2 = \sqrt{2}e_1 + 2e_3, \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{-1}{3}e_1 + 3e_2 - e_3$$

1. Déterminer la matrice de la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. Déterminer la matrice de la famille  $(v_1, v_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .




---

---

---

---

---

---

---

---



### Exemple

Déterminer la matrice de la famille  $\mathcal{F} = ((X+1)^k)_{0 \leq k \leq n}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .




---

---

---

---

---

---

---

---

## 1.2) Matrice d'une application linéaire $u \in L(E, F)$ .



### DÉFINITION

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimensions finies.

$$\begin{cases} \mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p) \text{ est une base de } E \\ \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \text{ est une base de } F \end{cases}$$

Pour chaque  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , 
$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i$$

On appelle matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$ , la matrice.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \stackrel{\text{def}}{=}$$

■ **NB :** La  $j^{\text{me}}$  colonne de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$  est formée par les coordonnées de  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

■ **En particulier :** Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

### Exemple

Soit  $u$  l'application linéaire  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x + 2y, y, 3x - y) \end{cases}$ .

Déterminer la matrice de  $u$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ .



.....

.....

.....

.....

### Exemple

Soit  $u$  l'application linéaire  $u : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$

Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .



.....

.....




---

---

---

---



### Exemple

Soit  $\varphi$  l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))\end{aligned}$$

Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n$ .




---

---

---

---

---



### Exemple

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\varphi$  l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM\end{aligned}$$

Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .




---

---

---



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



### Remarque

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) =$$

$$, \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(0_{\mathcal{L}(E, F)}) =$$

### Proposition

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

$$\begin{cases} \mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p) \text{ est une base de } E \\ \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \text{ est une base de } F \end{cases}$$

Les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \varphi : \quad \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \psi : \quad \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.



### Remarque

Si  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

$$\dim \mathcal{L}(E, F) =$$

$$\dim \mathcal{L}(E) =$$

### 1.3) Application linéaire canoniquement associée à une matrice .



#### DÉFINITION

Soit  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On appelle application linéaire canoniquement associée à  $A$ , notée  $f_A$ , l'unique application linéaire  $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  dont la matrice dans les bases canoniques  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  de  $\mathbb{K}^p$  et de  $\mathbb{K}^n$  est  $A$ .

$$A =$$



**Remarque : Deux formes de l'application canoniquement associée à  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

■ **Forme 1 :**  $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$  avec :  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$

■ **Forme 2 :**  $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{cases}$



#### Exemple

L'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  est :



.....

.....

.....

.....



#### DÉFINITION : NOYAU, IMAGE ET RANG D'UNE MATRICE

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  d'application linéaire canoniquement associée notée  $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ . On définit le noyau, l'image, et le rang de  $A$  comme suit :

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f_A), \quad \text{Im}(A) = \text{Im}(f_A) \quad \text{et} \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(f_A)$$



### Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$  Déterminer  $\text{Ker}(A)$ ,  $\text{Im}(A)$ ,  $\text{rg}(A)$



.....

.....

.....

.....

.....

### 1.4) Écriture matricielle de $u(x)$

#### Proposition

$$\begin{cases} B = (e_1, e_2, \dots, e_p) \text{ est une base de } E \\ B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \text{ est une base de } F \end{cases}$$

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $x \in E$ . Alors :

$$\text{Mat}(u(x)) = \text{Mat}(u) \times \text{Mat}(x)$$



#### Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



### Remarque



### Exemple

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  deux bases de  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 + \frac{3}{2}e_2 + \frac{5}{4}e_3 \end{cases}$$

$$A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}; \quad M = \underset{\mathcal{C}, \mathcal{B}}{\text{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}; \quad N = \underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Déterminer  $f(\varepsilon_1)$  en utilisant les différentes écritures matricielles.




---

---

---

---

---

---

---

---



## 1.5) Matrice de la composée

### Proposition : $\text{Mat}(g \circ f)$

Soient  $E, F, G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies de bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$   
Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

$$\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \times \text{Mat}(f)$$

**En particulier :** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Mat}(f^n) = (\text{Mat}(f))^n$$

### Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Exemple

Soit deux applications linéaires :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x - y, x + x + z) \end{cases} \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x + 2y, x - y) \end{cases}$$

On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}'$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Déterminer  $\text{Mat}(g \circ f)$  et  $\text{Mat}(f \circ g)$
2. Donner l'expression analytique de  $g \circ f$  et de  $f \circ g$



.....

.....

.....




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Exemple

Soit  $\varphi$  l'application linéaire suivante :

$$\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \longmapsto P(X+1)$$

1. Déterminer la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base canoniques de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  Calculer  $A^n$




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Remarque**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

$u$  est un projecteur  $\iff$

$u$  est une symétrie  $\iff$

**Corollaire**

L'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

**Preuve**

.....

.....

**Corollaire :  $\text{Mat}(f^{-1})$** 

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$  est inversible ;  
dans ce cas, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f))^{-1}$$

**En particulier :** si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors :

$f$  est un automorphisme de  $E$  si et seulement si  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$  est inversible ;  
dans ce cas, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$$

**Preuve**

.....

.....

.....

.....

.....

**Exemple**

L'application linéaire  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \\ (x, y) & \longmapsto (2x - y, x + 3y) \end{cases} \mathbb{R}^2$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .




---

---

---

---

---

---

**Exemple**

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $\varphi(P) = P(X + 1)$ .

Déterminer l'inverse de la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .




---

---

---

---

---

---

---

---

**Remarque**

L'application :

$$\varphi : \begin{cases} (\text{GL}(E), \circ) & \longrightarrow (\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \\ u & \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

**Proposition : Caractérisations des matrices inversibles**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  est inversible
- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad BA = I_n$
- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n$
- $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX = 0 \implies X = 0$
- les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- $\text{rg}(A) = n$

**Preuve**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exemple**

L'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

## 2. Changements de base

Dans cette partie,  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. On suppose que :

- $E$  est de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$  ;
- $F$  est de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  sont deux bases de  $F$ .

### 1.1) Matrices de passage



#### DÉFINITION : MATRICE DE PASSAGE

On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$  la matrice carrée suivante :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

On note aussi  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  ou encore  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$



#### Remarques

- Les colonnes de  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  dans l'ancienne  $\mathcal{B}$ .
- $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}(\text{Id}_E)$ .
- $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} =$



#### Exemple

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  deux bases de  $E$  telles que :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .



.....

.....



### Exemple

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3), \quad \mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$$

Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .




---

---

---

---

---

---

---

---

### Proposition

Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  trois bases du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Alors

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$$



### Preuve

---

---

---

---

---

---

---

---

**Proposition**

La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$  est **inversible** et son inverse  $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} =$

**Preuve**

.....

.....

.....

.....

**Exemple : Calcul de l'inverse de  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$** 

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  deux bases de E



.....

.....

.....

.....

.....

**Proposition**

Soit une matrice inversible  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  et une base  $\mathcal{B}$  de l'espace E. Alors :

il existe une base  $\mathcal{B}'$  de E telle que  $A = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

**Preuve**

.....

.....






---

---

---

---

---



### Remarque



Toute matrice inversible s'interprète comme une matrice de passage

## 1.2) Formules de changement de base

### a) Pour un vecteur

- **But :** Le lien entre  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$

#### Proposition

Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = P \text{ Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$



### Preuve

---

---

---

---

---

---

---



### Exemple :

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$  deux bases de  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = -2e_1 + e_2 \end{cases}$$

Exprimer  $x = e_1 + 2e_2$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .




---

---

---

---

---

---



### Exemple : coordonnées cylindriques

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}' = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$  la base cylindrique de  $\mathbb{R}^3$

#### b) Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$

- **But :** Le lien entre  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$

#### Proposition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme, alors :

La formule du changement de base pour un endomorphisme est :



#### Preuve

---

---

---




---

---

---

---

---

---



### Exemple :

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associés à la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  une base de  $E$  telle que :  $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 \\ \varepsilon_2 = e_1 + e_2 \end{cases}$

avec  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ .




---

---

---

---

---

---

---

---



### Exemple

Soit  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  une base de  $E$  telle que :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

avec  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### c) Pour une application linéaire

- **But :** Le lien entre  $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(u)$

#### Proposition

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

La formule du changement de base pour une application linéaire est :



.....

.....

.....

.....

### Exemple

Soit  $u$  l'application linéaire  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (-x + y, -6x + 4y, 2x - y) \end{cases}$   
 $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $\mathbb{R}^3$

1. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u)$ ,  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ,  $P_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$
2. En déduire  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(u)$




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 3. Matrices semblables - équivalentes

### 1.1) Matrices semblables

#### DÉFINITION : MATRICES SEMBLABLES

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$A$  et  $B$  sont semblables

SSI

il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$

**Remarque**Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et siAlors  $\underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(u)$  et  $\underset{\mathcal{B}'}{\text{Mat}}(u)$  sont .....

.....

.....

.....

.....

**Remarque**La relation "A est semblable à B" est une relation d'équivalence dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 

- **Réflexivité :**
- **Symétrie :**
- **Transitivité :**

**Proposition : Deux matrices semblables ont même trace**Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 

Si A et B sont semblables alors :



.....

.....

.....

.....

**Exemple**

Les matrices suivantes sont-elles semblable?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Proposition : Traduction en terme d'applications linéaires.**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables  $\iff A$  et  $B$  sont matrices d'un même endomorphisme

**c-à-d** : il existe deux bases de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  et un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  tels que

$$A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(u); \text{ et } B = \underset{\mathcal{B}'}{\text{Mat}}(u)$$

 **Preuve**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 **Méthodes : Pour montrer que deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables**

- On note  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et on cherche une base  $\mathcal{B}$  telle que  $\underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(u) = B$
- Chercher  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que :  $A = PBP^{-1}$

 **Exemple**

Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  sont .....

