

APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Déterminer $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sur une base de E



Exemple

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, tel que

$$u(e_1) = (1, 2, 1), \quad u(e_2) = (0, 0, 1), \quad u(e_3) = (1, 1, 0)$$

On a alors :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u(x, y, z) = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Théorème

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev.

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare (e_i)_{i \in I} \text{ une base de E} \\ \blacksquare (f_i)_{i \in I} \text{ une famille de F} \end{array} \right. \implies (\exists! u \in \mathcal{L}(E, F)), (\forall i \in I), u(e_i) = f_i$$



Preuve

.....

.....

.....

.....



Exemple

L'application linéaire suivante

$$\begin{array}{ccc} \psi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto P' \end{array}$$

est aussi définie par :

$$\psi(1) = 0, \psi(X) = 1, \psi(X^2) = 2X, \dots, \psi(X^n) = nX^{n-1}$$

Ainsi : $\psi\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) = \dots\dots\dots$



Remarque

■ Une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est déterminée entièrement et d'une manière unique par ses valeurs sur une base de E

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare \text{ Si } (e_i)_{i \in I} \text{ est } \mathbf{g\acute{e}n\acute{e}ratrice} \text{ en particulier une } \mathbf{base} \text{ de } E \\ \blacksquare \text{ alors } (u(e_i))_{i \in I} \text{ est une famille } \mathbf{g\acute{e}n\acute{e}ratrice} \text{ de } \text{Im}(u) \end{array} \right.$$

.....
.....

$$\text{Im}(u) = \dots\dots\dots$$

■ En dimension finie

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare \text{ Si } (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est } \mathbf{g\acute{e}n\acute{e}ratrice} \text{ en particulier une } \mathbf{base} \text{ de } E \\ \blacksquare \text{ alors } (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est une famille } \mathbf{g\acute{e}n\acute{e}ratrice} \text{ de } \text{Im}(u) \end{array} \right.$$

.....
.....

$$\text{Im}(u) = \dots\dots\dots$$



EXERCICE 1

$$\begin{array}{ccc} u : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto XP' - 2P \end{array}$$

Déterminer $\text{Im}(u)$, et $\dim(\text{Im}(u))$

 Solution

 EXERCICE 2

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et A une partie de E . Montrer que $u(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(u(A))$

 Solution

 EXERCICE 3

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini par :

$$u(1) = 3 + 4X - 5X^2, \quad u(X) = -4 - 7X + 10X^2, \quad u(X^2) = -2 - 4X + 6X^2$$

Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$

 Méthode

Pour montrer que deux applications linéaires sont égales, il suffit de montrer qu'elles se coincident sur une base.

 Solution

2. Isomorphismes en dimension finie

Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B}$ une **base** de E .

- u est injective $\iff u(\mathcal{B})$ est **libre**.
- u est surjective $\iff u(\mathcal{B})$ est **génératrice** de F .
- u est bijective $\iff u(\mathcal{B})$ est une **base** de F .



Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



EXERCICE 3

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) &\longmapsto aX^2 + bX + c \end{aligned}$$

Montrer que u est un **isomorphisme** de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}_2[X]$



Solution

.....

.....

.....

.....

.....

**En général**

Si $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de E , alors les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n &\longrightarrow E & \psi : E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i f_i & \sum_{i=1}^n x_i f_i &\longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

sont des **isomorphismes**

Caractérisation par la dimension

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie**, alors

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \iff \dim E = \dim F.$$

**Preuve**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Remarques**

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F deux $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie**.

$$\blacksquare u \text{ est injective} \implies \dim E \leq \dim F.$$

$$\blacksquare u \text{ est surjective} \implies \dim E \geq \dim F.$$

$$\blacksquare u \text{ est bijective} \implies \dim E = \dim F.$$

Preuve

Conséquence

- Tout espace vectoriel de **dimension** n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$
- Deux espaces vectoriels de dimensions différentes ne sont pas isomorphes.

Exemples

- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_2[X]$ ne sont pas **isomorphes**.
- $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont **isomorphes**.

3. Théorème du rang et conséquences

3.1) Rang d'une famille de vecteurs

DÉFINITION

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de E .

On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$ l'entier naturel (noté $\text{rg}(\mathcal{F})$)

$$\text{rg}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{déf}}{=} \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$$

Exemples

- Dans $\mathbb{R}[X]$: $\text{rg}(1, X, \dots, X^p) =$
- Dans $\mathbb{R}^3$: $\text{rg}((1, 2, 3), (2, 4, 6)) =$
- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\text{rg}(\cos, \sin) =$



En général

$(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est libre $\iff \text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \dots$



.....

.....

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n . $\dim E = n$

- $\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_p) \leq \dots$
- $\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_p) = n \iff E = \dots$
- $\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n) = n \iff (v_1, v_2, \dots, v_n) \dots$



Preuve

.....

.....

.....

.....



Méthode : Pour déterminer le rang d'une famille.

$\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est inchangé par les opérations suivantes :

- Si on retire les vecteurs $v_i = 0$
- $v_i \longleftrightarrow v_j$
- $v_i \longleftarrow v_i + \lambda v_j$
- $v_i \longleftarrow \alpha v_i \quad \alpha \neq 0$



Exemples

.....

.....

★ EXERCICE 5

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Calculer $\text{rg}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$
2. Calculer $\text{rg}(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2 + e_3)$



Solution

.....

.....

.....

.....

.....

3.2) Rang d'une application linéaire



DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang** de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'entier naturel (noté $\text{rg}(u)$)

$$\text{rg}(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \dim(\text{Im}(u))$$



Remarque

- $$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare \text{ Si } (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est une base de } E \\ \blacksquare \text{ alors } \text{Im } u = \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$$\text{rg}(u) = \dots\dots\dots$$



EXERCICE 6

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, y - z, z + x) \end{array}$$

Déterminer le rang de f et une base de $\text{Im } f$.

**Solution**

.....

.....

.....

.....

.....

**EXERCICE 7**

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto XP' - 2P \end{aligned}$$

Déterminer $\text{rg}(u)$

**Solution**

.....

.....

.....

.....

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective} \iff \text{rg}(u) = \dots\dots\dots$$

$$u \text{ est surjective} \iff \text{rg}(u) = \dots\dots\dots$$

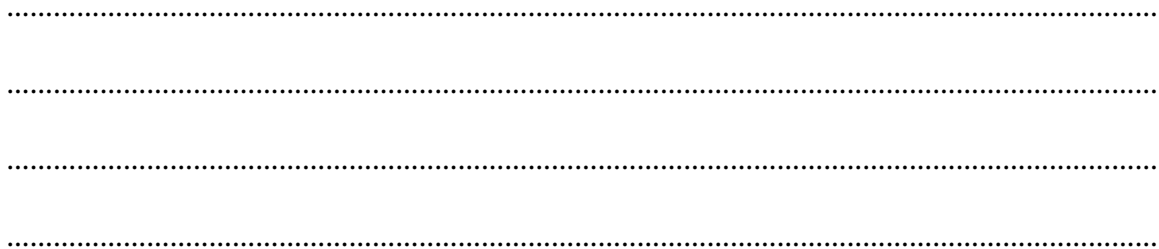
$$u \text{ est bijective} \iff \text{rg}(u) = \dots\dots\dots$$

**Preuve**

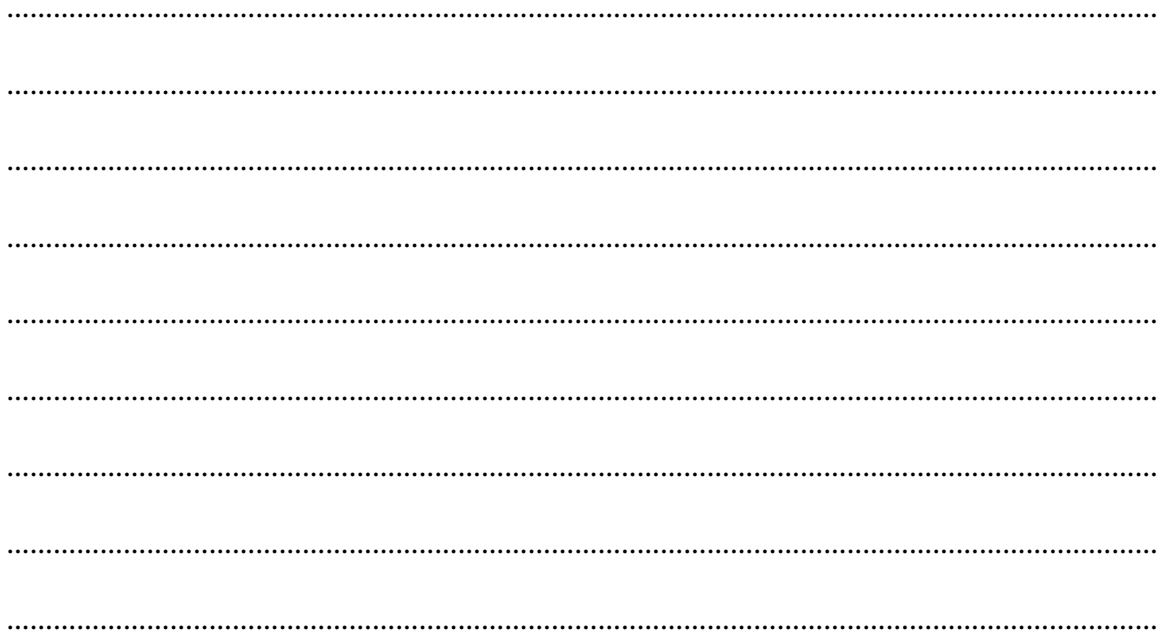
.....

.....

.....



Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit G un sev de E .

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare \text{ Si } \mathbf{E} = \text{Ker}(\mathbf{u}) \oplus \mathbf{G} \\ \blacksquare \text{ alors } \mathbf{G} \text{ et } \text{Im}(\mathbf{u}) \text{ sont isomorphes.} \end{array} \right.$$


Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev tel que E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\text{rg}(u) = \dim E - \dim(\text{Ker } u)$$

Preuve

Remarques

- **Théorème du rang :** $\dim E = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u)$
- $\dim(\text{Ker } u) = 0 \iff \dim(\text{Im } u) = \dim E$

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, Si $\dim E = \dim F$ alors :

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}$$

Preuve

★ EXERCICE 8

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) &\longmapsto (a+b)X^2 + (a+c)X + (a+b+c) \end{aligned}$$

Montrer que f est un isomorphisme $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}_2[X]$

solution

★ EXERCICE 9

Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts .

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$

solution

Corollaire

Soient E $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$f \in \mathbf{GL}(E) \iff \exists g \in \mathcal{L}(E), \quad g \circ f = \text{id}_E \text{ ou } f \circ g = \text{id}_E$$

**Preuve**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Remarque**

La réciproque de la corollaire n'est pas vraie au cas de dimension infinie.

**Exemple**

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto P' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto g(P): x \longmapsto \int_0^x P(t) dt \end{array}$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....



Remarques : Théorème du rang sur la restriction $u|_H$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et H sev de E .

$$\dim H = \dim(H \cap \text{Ker } u) + \dim(u(H))$$

En particulier : Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ Si $H = \text{Im}(f)$

$$\dim \text{Im}(f) = \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) + \dim(g(\text{Im}(f)))$$

.....

Conséquences

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$

g est injective $\implies \text{rg}(g \circ f) = \dots\dots\dots$

f est surjective $\implies \text{rg}(g \circ f) = \dots\dots\dots$

f est bijective $\implies \text{rg}(g \circ f) = \dots\dots\dots$

g est bijective $\implies \text{rg}(g \circ f) = \dots\dots\dots$



Remarque

↪ La composée par un isomorphisme ne change pas le rang d'une application linéaire .



EXERCICE 10

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev, E_1 et E_2 deux sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.

Supposons que $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.

Montrer qu'il existe unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f|_{E_1} = u_1$ et $f|_{E_2} = u_2$.



solution

.....

