THÈME 3 : SYSTÈMES LINÉAIRES

Pivot de Gauss

Système de n équations à p inconnues

$$(\mathbf{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Les lignes du système sont les équations linéaires $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$
- Les inconnues sont les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$
- Les coefficients du système sont les nombres $a_{i,j}$.
- Les seconds membres sont les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
- Résoudre le système $(\mathbf{S})$ c'est trouver tous les $p-$uplets$(x_1, x_2, ..., x_p)$ vérifiant les n équations.
- Le système $(\mathbf{S})$ est dit **compatible** lorsqu'il a au moins un $p-$uplet solution, et **incompatible** lorsqu'il n'a aucune solution.

Opérations élémentaires sur les lignes

Les opérations élémentaires sur les lignes L_1, $L_2, \ldots, L_n$ du système $(\mathbf{S})$.

- $L_i \longleftarrow \alpha L_i$
- $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j \qquad \beta \in \mathbb{R}$
- $L_i \overset{\alpha \neq 0}{\longleftarrow} \alpha L_i + \beta L_j$
- $L_i \longleftrightarrow L_j$

Méthode du pivot de Gauss

Effectuons **des opérations élémentaires** sur les lignes du système $(\mathbf{S})$ jusqu'à obtenir un système équivalent simple, dont la solution se détermine facilement.

- **Étape 1 :** On suppose $a_{1,1} \neq 0$ par exemple (quitte à permuter les équations ou les inconnues).

  On supprime la variable x_1 , en effectuant les opérations élémentaires :

$$L_i \leftarrow a_{1,1}L_i - a_{i,1}L_1 \quad \text{pour } 2 \leqslant i \leqslant n$$

On obtient alors un nouveau système :

$$(\mathbf{S}') : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \quad a_{1,2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & \\ \qquad a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,p}x_p = b'_2 & L_2 \leftarrow a_{1,1}L_2 - a_{2,1}L_1 \\ \qquad a'_{3,2}x_2 + a'_{3,3}x_3 + \cdots + a'_{3,p}x_p = b'_3 & L_3 \leftarrow a_{1,1}L_3 - a_{3,1}L_1 \\ \qquad \vdots & \\ \qquad a'_{n,2}x_2 + a'_{n,3}x_3 + \cdots + a'_{n,p}x_p = b'_n & L_n \leftarrow a_{1,1}L_n - a_{n,1}L_1 \end{cases}$$

- **Étape 2 :** On applique à ces $(n-1)$ lignes la même méthode que précédemment pour « éliminer » x_2 des $(n-2)$ dernières lignes.

$$(\mathbf{S}'')\left\{\begin{array}{lll} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \quad +\cdots+a_{1p}x_p & =b_1 & \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2+a'_{23}x_3 \quad +\cdots+a'_{2p}x_p & =b'_2 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 \quad +\cdots+a''_{3p}x_p & =b''_3 & \mathrm{L}_3 \leftarrow a'_{1,1}\mathrm{L}_3-a'_{3,1}\mathrm{L}_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots & =\vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a''_{n3}x_3 \quad +\cdots+a''_{np}x_p & =b''_n & \mathrm{L}_n \leftarrow a'_{1,1}\mathrm{L}_n-a'_{n,1}\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$$

En itérant le procédé, on finit par obtenir un système triangulaire du type :

$$(\mathbf{S}):\left\{\begin{array}{cccccl} \alpha_{1,1}x_1 & \alpha_{1,2}x_2 & \cdots & & \cdots & \alpha_{1,p}x_p=\beta_1 \quad \mathrm{L}_1 \\ 0 & \alpha_{2,2}x_2 & & & & \alpha_{2,p}x_p=\beta_2 \quad \mathrm{L}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{r,r}x_r & \cdots & \alpha_{r,p}x_p=\beta_r \quad \mathrm{L}_r \end{array}\right.$$

où $\alpha_{i,i}\in\mathbb{K}^*$ pour $1\leqslant i\leqslant r$.

- **Étape 3 :** On résout ce système simple .

EXEMPLE

Résoudre le système $(\mathbf{S}_1):\left\{\begin{array}{ll} x-3y+2z & =3 \\ -2x+3y-z & =0 \\ 5x+4y-z & =-7 \end{array}\right.$

EXEMPLE

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot .

$$(\mathbf{S_2}):\left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z+4t & =11 \\ 2x+3y+4z+t & =12 \\ 3x+4y+z+2t & =13 \\ 4x+y+2z+3t & =14 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{S_3}):\left\{\begin{array}{ll} x+y+z+t & =1 \\ x+2y-z+3t & =4 \\ x-y+2z-2t & =2 \\ x+3y-3z+5 & t=7 \end{array}\right.$$

EXEMPLE

Résoudre les systèmes suivants

$$(\mathbf{S}_4):\left\{\begin{array}{ll} x+3y+5z-2t-7u & =3 \\ 3x+y+z-2t-u & =1 \\ 2x-y-3z+7t+5u & =2 \\ 3x-2y-5z+7t+8u & =\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \text{ un paramètre réel})$$

$$(\mathbf{S}_5):\left\{\begin{array}{ll} mx+y+z+t & =1 \\ x+my+z+t & =-2 \\ x+y+mz+t & =0 \\ x+y+z+mt & =3 \end{array}\right. \quad (m \text{ un paramètre réel})$$