CHP 9 : SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

I. SUITES RÉELLES

1) GÉNÉRALITÉS

Définitions

Une suite réelle (u_n) est dite :

- **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n$.

- **bornée** si elle est **majorée** et **minorée**.
- **bornée** ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$.

- **constante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$.
- **stationnaire** si (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

- **périodique** si $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+N} = u_n$.

- **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

- **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.
- **strictement monotone** si elle strictement croissante ou strictement décroissante.

Opérations sur les suites

Soientt $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{\geq 0}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- **Addition :** $u + v \overset{\text{déf}}{=} (u_n + v_n)_{n\geq 0}$.
- **Multiplication par un réel :** $\lambda u \overset{\text{déf}}{=} (\lambda u_n)_{n\geq 0}$.
- **produit :** $uv \overset{\text{déf}}{=} (u_n v_n)_{n\geq 0}$.

Proposition

Si u et v sont bornées alors $\lambda.u,\ u+v,\ \ uv$ sont aussi bornées.

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

2) SUITES RÉELLES CONVERGENTES

Définition

Soient $u=(u_n)$ et $\ell\in\mathbb{R}$,

(u_n) **converge** vers ℓ $\iff$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\Rightarrow|u_n-\ell|\leq\varepsilon.$

$\iff$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0, |u_n-\ell|\leq\varepsilon$

- Dans ce cas ,on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ ou $\lim u_n=\ell$.
- La suite (u_n) **diverge** si elle **n'est pas convergente**,

(c'est-à-dire si elle n'admet pas une limite finie.)

Illustration géométrique

....

....

....

....

....

Exemple

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Exemple

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n^2+1} = 0$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Python

Écrire un programme calculant et affichant un entier $n \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel

$$\left|\frac{\sin(n)}{n^2+1}\right| \leq 10^{-6}$$

....

....

....

....

Proposition : **Unicité de la limite**

Si la suite (u_n) **converge** alors **sa limite est unique** .

Preuve

....

....

....

....

....

....

Remarques

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \overset{\ell\neq 0}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|.$

Preuve

....

....

....

....

Théorème :Convergence et bornitude

Toute suite réelle **convergente** est **bornée**.

Preuve

....

....

....

....

....

....

Remarque

La réciproque est fausse : La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ,mais ne converge pas

Proposition

Soit $u=(u_n)$ une suite réelle

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \bullet \quad \text{La suite } (\alpha_n) \text{ est } \textbf{bornée}\,. \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \alpha_n u_n = 0$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Exemple

■ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n - \arctan(n)}{n} = 0$

....

....

Exemple

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 0$

3) LIMITES FINIES ET RELATION D'ORDRE

Proposition

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $M, m \in \mathbb{R}$.

- **Si** $M < \ell$, **alors** $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ u_n > M$.
- **Si** $\ell < M$, **alors** $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ u_n < M$.
- **Si** $m < \ell < M$, **alors** $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ m < u_n < M$.

Preuve

En particulier

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

- **Si** $0 < \ell$, **alors** $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \ u_n > 0.$
- **Si** $\ell < 0$, **alors** $\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ \ u_n < 0.$
- **Si** $\ell \neq 0$, **alors** $\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ \ |u_n| > \dfrac{|\ell|}{2}.$

....

....

....

....

Exercice

- Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4}$

  Montrer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ \ |u_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}|$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Théorème :Conservation de l'inégalité

Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{\geq 0}$ deux suites réelles

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\quad u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \bullet\quad (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent .} \end{array}\right. \implies \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

Remarque

$$\begin{cases} \bullet \quad u_n < v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \bullet \quad (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent .} \end{cases} \quad \not\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$$

$$\begin{cases} \bullet \quad u_n \in [a,b] \text{ à partir d'un certain rang} \\ \bullet \quad (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \text{ .} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ell \in [a,b]$$

THÉORÈMES DE CONVERGENCE (PRATIQUES)

Théorème

$$\begin{cases} \bullet \quad |u_n - \ell| \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \bullet \quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \text{ .} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Théorème des gendarmes

On suppose que $w_n \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang .

$$\begin{cases} \bullet \quad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \\ \\ \bullet \quad \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{cases} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

Exercice

Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{\geq 0}$ deux suites réelles avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 1$.
On suppose que $u_n, v_n \in [0,1]$ à partir d'un certain rang .Montrer que la suite (u_n) convege et déterminer sa limite .

solution

....

....

....

....

Exercice

On considère la suite de terme général : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

1. Pour $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, comparer $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
2. Montrer que $\frac{S_n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

solution

....

....

....

....

....

Théorème de convergence monotone

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle .

- Si (u_n) est une suite **croissante** et **majorée** alors $\begin{cases} \bullet & (u_n) \text{ converge} \\ \bullet & \lim u_n = \sup(u_n) \end{cases}$
- Si (u_n) est une suite **décroissante** et **minorée** alors $\begin{cases} \bullet & (u_n) \text{ converge} \\ \bullet & \lim u_n = \inf(u_n) \end{cases}$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Exemple

Soit (u_n) la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.

....

....

....

....

....

Exemple

Étudier la nature des deux suites (u_n), (v_n) de termes généraux :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition : Suites adjacentes

Soit $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ deux suites réelles .

■ u et v sont dites **adjacentes** ssi
$\begin{cases} \bullet \text{ l'une } \textbf{croissante} \text{ et l'autre } \textbf{décroissante} \\ \bullet \ \lim u_n - v_n = 0 \end{cases}$

Illustration graphique

Soit (u_n) et (v_n) deux suites **adjacentes** (avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante).

....

....

....

....

....

Théorème des suites adjacentes

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles **adjacentes** alors elles **convergent** vers une **même limite** ℓ .

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Application : Segments emboîtés

Si $\begin{cases} \bullet \quad (\mathrm{I}_n = [a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite (de segments) } \textbf{décroissante } (\mathrm{I}_{n+1} \subset \mathrm{I}_n) \\ \bullet \quad \lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0\,. \end{cases}$

Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

Preuve

....

....

....

....

....

....

4) Limites infinies

Définition

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle ,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq B$

Illustration graphique

....

....

....

Python

Écrire un programme calculant et affichant la valeur du premier entier n tel que : $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right| \geq 10^4$

....

....

....

....

....

Théorème :Divergence par comparaison

Soit $u=(u_n)$, $v=(v_n)$ deux suites réelles .

$$\begin{cases} \bullet \quad v_n \leq u_n \quad \text{à } \textbf{P.C.R} \\ \bullet \quad \lim v_n = +\infty \,. \end{cases} \implies \quad \lim u_n = +\infty$$

$$\begin{cases} \bullet \quad u_n \leq v_n \quad \text{à } \textbf{P.C.R} \\ \bullet \quad \lim v_n = -\infty \,. \end{cases} \implies \quad \lim u_n = -\infty$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple

- Étudier la nature de la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

....

....

....

....

....

Exemple

- Étudier la nature de la suite (u_n) de terme général :

$$v_n = \prod_{k=1}^{2n} \left(2 - \frac{k}{2n}\right)$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque

- $\lim u_n = 0^+ \iff \lim \frac{1}{u_n} = +\infty$
- $\lim u_n = 0^- \iff \lim \frac{1}{u_n} = -\infty$
- **Formes indéfinies :** $\frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}, \ \infty \times 0, \ +\infty - \infty$

Théorème :Divergence et monotonie

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle ,

- Si (u_n) est une suite **croissante non majorée** alors $\begin{cases} \bullet & (u_n) \textbf{ diverge} \\ \bullet & \lim u_n = +\infty \end{cases}$
- Si (u_n) est une suite **décroissante non minorée** alors $\begin{cases} \bullet & (u_n) \textbf{ diverge} \\ \bullet & \lim u_n = -\infty \end{cases}$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle **monotone** admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

5) SUITES EXTRAITES

Lemme

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application **strictement croissante** ,alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Preuve

....

....

....

....

....

Définition

Les suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **strictement croissante**

■ **Par exemple :** $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite (u_n)

Remarque

Si $\varphi,\ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **strictement croissante** ,alors :

$\left(u_{\varphi o \psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème

Toute **suite extraite** $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite (u_n) de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tend aussi vers ℓ.

$$\lim u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim u_{\varphi(n)} = \ell$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Remarque

....

....

....

....

Théorème

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle , $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{cases} \bullet \quad \lim u_{2n} = \ell \\ \bullet \quad \lim u_{2n+1} = \ell \end{cases} \iff \lim u_n = \ell$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice

Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème de Bolzano Weistrass

De toute suite **réelle bornée** on peut extraire une **sous-suite** convergente.

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Application

Toute fonction réelle f **continue** sur un **segment** est **bornée** et **atteint ses bornes** .

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

II. Brève extension aux suites complexes

Définition-Proposition

Soit $z = (z_n)$ une suite complexe.

$$(z_n) \text{ est dite bornée} \overset{\text{déf}}{\iff} \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$$
$$\overset{\text{prop}}{\iff} \mathfrak{Re}(z_n) \text{ et } \mathfrak{Im}(z_n) \text{ le sont .}$$

Preuve

....

....

....

....

....

....

Définition-Proposition

Soit $z = (z_n)$ une suite complexe. $\ell \in \mathbb{C}$

$$\lim z_n = \ell \overset{\text{déf}}{\iff} \lim |z_n - \ell| = 0$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \ |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$
$$\overset{\text{prop}}{\iff} \begin{cases} \bullet & \lim \mathfrak{Re}(z_n) = \mathfrak{Re}(\ell) \\ \bullet & \lim \mathfrak{Im}(z_n) = \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

Preuve

....

....

....

....

....

Exercice

Soit $z=(z_n)$ une suite complexe telle que $\begin{cases} \bullet \quad z_0 = 1+2i \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\overline{z_n}) \end{cases}$

Étudier la convergence de la suite complexe (z_n) .

solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice

Soient (x_n) , (y_n) deux suites réelles. $\begin{cases} \bullet \quad x_0 = 1,\ \ y_0 = 1 \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2},\ \ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$

En introduisant les suites complexes ,montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites .

solution

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriétes

- **(Bornitude) :** Toute suite complexe convergente est bornée
- **(Suite extraite) :** Si (z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$,alors toute **suite extraite** de (z_n) converge vers ℓ.
- $\begin{cases} \bullet \quad \lim z_{2n} = \ell \\ \bullet \quad \lim z_{2n+1} = \ell \end{cases} \iff \lim z_n = \ell$
- Les opérations sur les limites sont encore valables pour les suites complexes convergentes.
- **(Bolzano-Weistrass) :** De toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

1. Exercices d'entrainement

Exercice 1

On pose, pour $n \geq 1$: $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$

1. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ est convergente de limite égale 0 .
2. Justifier alors qu'il existe un entier N tel que : si $n \geq \mathrm{N}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.
3. Monotonie de (u_n) ? En déduire, que (u_n) converge vers 0 .

Exercice 2

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 4, \forall k \in \{2, \ldots, n-2\}, \binom{n}{k} \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 3

1. Établir que : $\forall x \in]0, +\infty[, x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. On pose, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n} - \ln n$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclusion ?

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Montrer que si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite convergente. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite majorée. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $u_n = \left(5 \sin \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{5} \cos n\right)^n$ Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 8

Pour tout $n \geq 2$ on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \quad u_n = S_n - \ln n, \quad v_n = S_{n-1} - \ln n$$

1. Montrer que : $\forall x \in [0,1[, \quad x + \ln(1-x) \leq 0, \quad x - \ln(1+x) \geq 0$
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera γ leur limite commune. Montrer, de plus, que : $\forall n \geq 2, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$
3. En déduire une valeur approchée de γ à 10^{-1} près.
   (Il suffit de donner la réponse sous la forme de u_{n_0} ou v_{n_0}.)
4. Posons : $\forall n \geq 2$,

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$$

   (a) Soit $p, k \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq 2$. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{p+k} w_n$ en fonction de u_p et u_{p+k}

   (b) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=p+1}^{p+k} w_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite noté $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n$ vérifie :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n = u_p - \gamma$$