

## CHP1 : LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

## 1. CONNECTEURS, QUANTIFICATEURS

## Définition

- **Une assertion**  $P$  est un énoncé mathématique qui est soit VRAI, soit FAUX, et ne peut pas être vraie et fausse en même temps.
- **La négation** d'une assertion  $P$  sera notée :  $\neg P$ ,  $\bar{P}$

| $P$ | $\neg P$ |
|-----|----------|
| V   | F        |
| F   | V        |

- **Conjonction** :  $P$  et  $Q$
- **Disjonction** :  $P$  ou  $Q$
- **Implication** :  $(P \Rightarrow Q) \equiv (\bar{P} \text{ ou } Q)$
- **Équivalence** :  $P \Leftrightarrow Q$

| $P$ | $Q$ | $P \text{ et } Q$ | $P \text{ ou } Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| V   | V   | V                 | V                 | V                 | V                     |
| V   | F   | F                 | V                 | F                 | F                     |
| F   | V   | F                 | V                 | V                 | F                     |
| F   | F   | F                 | F                 | V                 | V                     |

## Exemples

1. Montrer que la fonction  $\ell n$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  revient à démontrer que l'assertion "  $\ell n$  est strictement croissante " est vraie.
2. Montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée revient à montrer la vérité de l'assertion suivante : «  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée »



## Un peu de vocabulaire

- Une proposition est une assertion vraie.
- Les assertions démontrées (les résultats des démonstrations) sont appelées, suivant leur importance, **théorèmes** ou **propositions**.
- **Un théorème** est une proposition importante.
- **Un lemme** est une proposition qui sert principalement à démontrer une autre proposition.
- **Un corollaire** est une proposition qui découle d'une autre proposition.

**Définition : Quantificateurs**

On définit les deux quantificateurs suivants :

- le quantificateur universel, noté " $\forall$ "
  - le quantificateur existentiel, noté " $\exists$ "
  - $\forall x \in E, P(x)$ , signifie que tous les éléments de  $E$  vérifient la propriété  $P$ .
  - $\exists x \in E, P(x)$ , signifie qu'il existe un élément de  $E$  qui vérifie la propriété  $P$ .
- De plus, si un unique élément de  $E$  vérifie  $P$ , on note :  $\exists! x \in E, P(x)$ .

**Exemples**

■  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$

■  $\forall x > -1, \ln(x+1) \leq x.$

.....

■  $\forall x \in [-1, 1], \exists! \theta \in [0, \pi] \quad x = \cos \theta \quad .$

.....

**Exercice**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels. Traduire à l'aide de quantificateurs chacune des assertions suivantes. On en donnera également la négation.

- (i) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est nulle.
- (ii) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante.
- (iii) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement décroissante.
- (iv) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  ne prend que des valeurs strictement inférieures à 2 .
- (v) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bornée.
- (vi) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  s'annule au plus une fois.



.....

.....

.....

.....

.....

.....



### Remarques

- L'ordre des quantificateurs différents est essentiel : on ne peut pas intervertir  $\exists$  et  $\forall$ .

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans l'écriture } \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y) \quad y \text{ dépend de } x. \\ \text{Dans l'écriture } \exists y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x, y) \quad y \text{ est indépendant de } x. \end{array} \right.$

- Quantificateurs et négation

$\left\{ \begin{array}{l} \text{La négation de } (\exists x \in E, P) \text{ est } (\forall x \in E, \neg P). \\ \text{La négation de } (\forall x \in E, P) \text{ est } (\exists x \in E, \neg P). \end{array} \right.$

### Exemple

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est bornée si

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$$

1. Donner un exemple de fonction bornée et un exemple de fonction qui ne l'est pas.
2. Quelles sont les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....



### En pratique

- Pour prouver  $\forall x \in E, P(x)$ , la rédaction commence toujours par : Soit  $x \in E$  .....
- Pour prouver  $\exists x \in E, P(x)$ , il suffit de trouver un  $x$  dans  $E$  tel que  $P(x)$  est vraie

### Exercice

1. Montrer que  $\forall x, y \in \mathbb{R} : 4xy \leq (x+y)^2$ .
2. En déduire que pour tous  $x, y, z > 0$  :

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y+z}{2}$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Propriétés

Soient P, Q, R des assertions.

■  $\overline{\overline{P}} \iff P$

■ **Lois de Morgan :**

$$\overline{(P \text{ ou } Q)} \iff (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$$

$$\overline{(P \text{ et } Q)} \iff (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$$

■ **Distributivités :**

$$[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \iff [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$$

$$[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \iff [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$$

■ **Transitivité :**  $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

■  $(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \text{ ou } Q)$

■  $\overline{(P \Rightarrow Q)} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$

■ **Contraposée :**  $(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

■  $(P \Leftrightarrow Q) \iff (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$

## 2. Comment construire une démonstration ?

### Prouver que $P \Rightarrow Q$ .

#### ■ Méthode 1 : Raisonnement direct .

On suppose  $P$  vraie et on montre que  $Q$  est vraie.

Dans ce cas ,on rédige toujours comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Supposons que ( P vraie )} \\ \text{Montrons que ( Q est vraie)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Donc ( Q est vraie)} \end{array} \right.$$

#### ■ Méthode 2 : Raisonnement par contraposée $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ .

On suppose  $Q$  fausse et on montre que  $P$  est fausse.

Dans ce cas ,on rédige toujours comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Par contraposée :Supposons que ( Q fausse )} \\ \text{Montrons que ( P est fausse)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Donc ( P est fausse)} \end{array} \right.$$

### Exemple

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable .Montrer que :

$$f \text{ est impaire} \Rightarrow f' \text{ est impaire}$$



.....

.....

.....




---

---

### Exemple

Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{Z}), n^2 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$




---

---

---



### Remarques

Dire que  $P \Rightarrow Q$  est vraie, c'est dire que :

- "Pour que  $P$  soit vraie, il faut que  $Q$  soit vraie" (Condition nécessaire),
- "Pour que  $Q$  soit vraie, il suffit que  $P$  soit vraie" (Condition suffisante).

### Exercice

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , Montrer que :  $\sum_{i=1}^n x_i = 1 \Rightarrow \exists i \in [1, n], x_i \geq \frac{1}{n}$




---

---

---

---

---

---

---

---

## Prouver que $P \iff Q$ .

### ■ Méthode 1 : Par double implication .

Montrer que  $P \implies Q$  et  $Q \implies P$

Dans ce cas ,on rédige toujours comme suit :

|   |              |                                                     |
|---|--------------|-----------------------------------------------------|
| { | $\implies$   | On suppose P vraie et on montre que Q est vraie.    |
|   | .            |                                                     |
|   | .            |                                                     |
|   | .            |                                                     |
|   | $\impliedby$ | Supposons Q est vraie et on montre que P est vraie. |
|   | .            |                                                     |

### ■ Méthode 2 : Par équivalences successives .

$$P \iff P_2 \iff P_3 \iff \dots \iff Q$$

## Exemple

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ , Montrer que :  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff \forall i \in [1, n], \quad x_i = 0$



.....

.....

.....

.....

.....

### Exercice

Soient  $a \in ]0, +\infty[$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :

$$0 \leq x - \frac{k}{2^n} a < \frac{a}{2^n} \iff k = \left\lfloor \frac{x 2^n}{a} \right\rfloor$$




---

---

---

---

---



### Remarques

" $P \iff Q$ " est synonyme des trois assertions suivantes :

- "P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses",
- "P est vraie si et seulement si Q est vraie",
- "Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie" (Condition nécessaire et suffisante ou Caractérisation).

## 3. Autres modes de démonstration



### Raisonnement par l'absurde

**But** : Pour montrer, qu'une assertion P est vraie .

On utilise toujours une rédaction du type :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Supposons, par l'absurde, que P fausse ,} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Contradiction (absurde).} \end{array} \right.$

### Exemple

Montrer que si p est un nombre premier alors  $\sqrt{p}$  est un irrationnel .




---




---

---

---

### Exercice

Une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet la limite  $\ell$  en  $+\infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 > 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Montrer l'unicité de la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $+\infty$ .




---

---

---

---

---

---

---

### Exercice

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , mais ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $f$  garde un signe constant sur  $\mathbb{R}$ .




---

---

---

---

---



## Raisonnement par disjonction des cas

**Principe** : Pour montrer, qu'une assertion  $P$  est vraie, on distingue tous les cas possibles.

$$[(P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R]$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cas1 : Si } P \text{ est vraie.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Cas2 : Si } Q \text{ est vraie.} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$

## Exemple

Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égale à 5, Montrer que 24 divise  $p^2 - 1$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## Raisonnement par analyse synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse se fait en deux phases :

- **L'analyse** : On suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- **La synthèse** : On montre que ces conditions sont en fait suffisantes.

**Exercice**

Montrer que toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  peut s'écrire, sous la forme  $f = g + h$  avec  $g$  fonction paire et  $h$  fonction impaire.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice**

Soit  $X = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $x_1 + \dots + x_n \neq 0$ . et soit  $H$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  défini par :

$$H = \{Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 + \dots + y_n = 0.\}$$

Montrer que tout vecteur  $Z$  de  $\mathbb{R}^n$  se décompose sous la forme  $Z = \lambda X + Y$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $Y \in H$ . Justifier que cette décomposition est unique.



.....

.....

.....

.....