

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Espace vectoriel de dimension finie



DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev

E est dit de **dimension finie** $\stackrel{\text{déf}}{\iff}$ E possède une famille **génératrice finie**.

■ $\exists u_1, u_2, \dots, u_n \in E \quad / \quad E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$



Exemples

■ $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.



.....

■ $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.



.....

■ $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.



.....

■ $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie (**dimension infinie**)



.....
.....
.....

Lemme

Soit $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ un $\mathbb{K}$ -ev, alors

Toute famille contenant au moins $n + 1$ vecteurs de E est **liée**

**Exemple**

■ Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3)$

La famille $L = (X, 1, X^2 + 1, X^3 + X, (X - 1)^3)$ est liée.

.....

**Remarques**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie .

■ Si $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ est libre , alors toute famille génératrice possède

.....

■ Si $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, alors toute famille libre possède

.....

■ Si L est une famille libre et G famille génératrice de E , alors

.....

Théorème :Th de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie , alors

Toute famille **libre** de E peut être complétée en une base de E .

**Preuve**

.....

.....

.....

.....

.....



**Exemple**

Compléter la famille libre $L = (X - 1)$ en une base de l'espace $E = \text{Vect}(1, 2X, X - 2, X^2 + 1, X^3)$.



Corollaire : L'extraction d'une base

Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, alors

De toute famille **génératrice** de E , on peut extraire une base de E .

**Preuve**

**Exemple**

Construire une base de l'ev $E = \text{Vect}((0, 0, 0), (1, -1, 1), (-2, 2, -2), (2, 1, 0), (3, 0, 1))$.



**THÉORÈME-DÉFINITION**

- Tout $\mathbb{K}$ -ev **non nul** $E \neq \{0_E\}$ de **dimension finie**, admet **au moins une base**.
- Toutes les bases de E sont **finies de même nombre d'éléments**.
- **Ce nombre d'élément** est appelé **la dimension** de E , on le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$.



Par convention : $\dim\{0_E\} = 0$



Preuve

.....

.....

.....

.....

.....



Remarque



L'espace vectoriel **nul** $E = \{0_E\}$ n'admet aucune base.



Exemples

■ $\dim \mathbb{K}_n[X] =$

■ $\dim \mathbb{K}^n =$

■ $\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) =$

■ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$

■ $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) =$

■ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$



Remarque



Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

$$(l_1, l_2, \dots, l_n) \text{ est une famille libre de } E \implies \dim \text{Vect}(l_1, \dots, l_n) = n$$



Exemples

■ $S = \{y \in \mathbb{K}^I, \ y' + a(x)y = 0\}$

■ $S = \{y \in \mathbb{K}^I, \ y'' + ay' + by = 0\}$

- Si l'équation caractéristique (E.C) possède une unique solution $r \in \mathbb{K}$.

- Si **(E.C)** possède deux solution distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Si **(E.C)** possède deux solutions complexes $r_1 = r + iw$ et $r_2 = r - iw$.

Proposition

Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie .

- $L = (l_1, l_2, \dots, l_p)$ une famille **libre** $\implies \text{Card}(L) = p \leq \dim E$
- $G = (g_1, g_2, \dots, g_q)$ une famille **génératrice** de $E \implies \dim E \leq \text{Card}(G) = q$
- Tout $\mathbb{K}$ -ev contenant une famille **libre infinie** est un espace de dimension infinie .



Preuve

.....

.....

.....

.....

.....



Exemple

- $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des ev de dimension infinie

.....

★ EXERCICE



Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes définie par $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.



Solution

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Proposition : Dimension d'un produit fini d'ev de dimension finie.

■ Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie**.

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

■ Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -ev de **dimensions finies**.

$$\dim \prod_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \dim E_i$$



Preuve

.....

.....

.....

2. Sous espace vectoriel en dimension finie

2.1) Dimension d'un sous espace vectoriel

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie**.

$$F \text{ un sev de } E \Rightarrow \begin{cases} \blacksquare F \text{ est de dimension finie} \\ \blacksquare \dim F \leq \dim E \end{cases}$$

$$\begin{cases} \blacksquare F \text{ un sev de } E \\ \blacksquare \dim F = \dim E \end{cases} \Rightarrow E = F$$

■ L'entier $\overset{\text{d\'ef}}{\text{codim}}(F) = \dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E .



Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 

- 



- Si l'équation caractéristique **(E.C)** possède une unique solution $r \in \mathbb{K}$.
- Si **(E.C)** possède deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Si **(E.C)** possède deux solutions complexes $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$.

2.2) Sev supplémentaires en dimension finie

Proposition : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie** et soit F, G deux sev de E .

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$



Remarque

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie**, et soit F, G deux sev de E .

$$F \cap G = \{0_E\} \iff \dim(F + G) = \dim F + \dim G$$



EXERCICE

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$

1. Déterminer $\dim(F \cap G)$.
2. Dédurre que $F + G = \mathbb{R}^3$.



Solution

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie** et soient F, G deux sev de E . Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare F \cap G = \{0_E\} \\ \blacksquare \dim E = \dim F + \dim G \end{array} \right. \Rightarrow E = F \oplus G$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare E = F + G \\ \blacksquare \dim E = \dim F + \dim G \end{array} \right. \Rightarrow E = F \oplus G$$

**Preuve**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**EXERCICE**

Soient $F = \text{Vect}((1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + t = 0 \text{ et } x = y\}$

Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

**Solution**

.....

.....

.....

Théorème : Juxtaposition des bases

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie** E

On note : $\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare \mathbf{B}_1 = (f_1, f_2, \dots, f_p) \text{ une base de } F \\ \blacksquare \mathbf{B}_2 = (g_1, g_2, \dots, g_q) \text{ une base de } G \end{array} \right.$

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G} \iff \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \text{ est une base de } E$$

■ On dit, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$ est une **base adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$



Preuve

Exemples

Soient $F = \text{Vect}((1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + t = 0 \text{ et } x = y\}$



.....

.....

Corollaire : Existence d'un supplémentaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de **dimension finie**.

Tout **sev** F admet **au moins** un sev G **supplémentaire** dans E . $E = F \oplus G$

■ Dans ce cas : **codim**(G) = $\dim E - \dim G = \dim F$.

Preuve



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y, z = 0\}$

Déterminer un sous espace supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.



.....

.....

.....

.....

★ EXERCICE

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$

1. Montrer que F est un s.e.v. de E , déterminer une base de F .
2. Déterminer un s.e.v. G supplémentaire de F dans E .
3. G est-il unique.

Solution

★ EXERCICE

1. Soit $F = \text{Vect}((1, 0, 2), (1, -1, 1))$.
Trouver un vecteur u tel que $F \oplus \text{Vect}(u) = \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) = \mathbb{R}^3$.

★ EXERCICE

Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$ non constants. On pose $P_k = U^k V^{n-k}$.
Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre,

1. lorsque $U \wedge V = 1$.
2. lorsque (U, V) est libre.

★ EXERCICE

Soit $a, b \in \mathbb{K}, a \neq b$. On pose $P_k = (X - a)^k (X - b)^{n-k}$.
Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

★ EXERCICE

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que P appartient à H si et seulement si $(X - 1)^2$ divise P .
3. Donner une base de H et déterminer sa dimension.

★ EXERCICE

Étudier l'indépendance de la famille $\mathcal{F}$ de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans les cas suivants :

$$1) \mathcal{F} = \left(f_k : x \mapsto \cos^k(x) \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad 2) \mathcal{F} = \left(f_k : x \mapsto |x - a_k| \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad 3) \mathcal{F} = \left(f_a : x \mapsto e^{ax} \right)_{a \in \mathbb{R}}$$

★ EXERCICE

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_n(X) = \frac{X(X-1) \times \dots \times (X-n+1)}{n!}$$

1. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \iff P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(X), \quad \alpha_n \in \mathbb{Z}$$

2.3) Somme de plusieurs sev $\sum_{i=1}^n E_i$

Définition : Somme de deux sev

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de E .

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n \stackrel{\text{déf}}{=} \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n\}$$

Ce qui signifie :

$$x \in \sum_{i=1}^n E_i \stackrel{\text{déf}}{\iff}$$



Remarque

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de E .

■ La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est un sev de E .

Définition : Somme directe

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ une famille finie de sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

■ La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est dite **directe** si on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

• Dans ce cas on note :

$$\sum_{i=1}^n E_i = \oplus_{i=1}^n E_i$$



Remarque

↗ Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de E .



■ La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est dite **directe** Si on a :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^n E_i \quad , \quad \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i \quad / \quad x = \sum_{i=1}^n x_i$$

Caractérisation : Somme directe en dimension finie

Si E est de dimension finie.

La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est **directe**

SSI

$$\dim \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \dim E_i$$

DÉFINITION 4 : Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ une famille finie de sev de E .

Il y a équivalence entre

$$1. \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i \quad , \quad \boxed{\sum_{i=1}^n x_i = 0} \implies \boxed{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0}$$

$$2. \quad \forall x \in \sum_{i=1}^n E_i \quad , \quad \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i \quad / \quad x = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$3. \quad \forall p \in [2, n] \quad E_p \cap \sum_{i=1}^{p-1} E_i = \{0_E\}$$

Si l'une est vérifiée, on dit La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe et on note $\sum_{i=1}^n E_i$ par $\oplus_{i=1}^n E_i$

EXEMPLE : $E = \mathbb{R}^3$

$$E_1 = \mathbb{R}(1, 0, 0) \quad E_2 = \mathbb{R}(1, 1, 0) \quad E_3 = \mathbb{R}(1, 1, 1)$$

II. RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie

DÉFINITION 3 : Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de E

Le nombre $\dimVect(u_1, \dots, u_p)$ est appelé rang de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

et on note $rg(u_1, \dots, u_p) = \dimVect(u_1, \dots, u_p)$.

EXEMPLE :

- $rg((1, 1, 1)) = \dimVect((1, 1, 1))$.
- $rg((1, 0), (0, 1)) = \dimVect((1, 0), (0, 1)) = 2$
- $rg(1, X, X) = \dimVect(1, X, X) = 2$
- $rg(X, 2X, 3X) = 1$

ON CONVIENT : $rg(0_E) = 0$

PROPRIÉTÉS 1 : On pose $\dim E = n$.

1) Si $x \in Vect(u_1, \dots, u_p)$ Alors $rg(u_1, \dots, u_p, x) = rg(u_1, \dots, u_p)$

2) $rg(u_1, \dots, u_p) \leq p$

3) $rg(u_1, \dots, u_p) \leq n$

4) $(u_1, \dots, u_p)$ est libre $\iff rg(u_1, \dots, u_p) = p$

5) $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de $E \iff rg(u_1, \dots, u_p) = n$

6) $(u_1, \dots, u_p)$ est une base $\iff rg(u_1, \dots, u_p) = n = p$

DÉMONSTRATION :

EXEMPLE : La famille $(1, X, X^2, X^4)$ est libre donc $rg(1, X, X^2, X^4) = 4$

CAS PARTICULIER : Une Famille echelonnée c'est une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ où chaque vecteur possède une composante non nulle, qui était nulle dans tous les précédents.

Une telle famille est **libre**.

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^4$

$$[u]_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [v]_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [w]_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille (u, v, w) est echelonnée donc libre est ainsi son rang vaut 3

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^3$

$$[u]_{B_c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [v]_{B_c} = \begin{pmatrix} -x \\ (x+1)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [w]_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2(1+x) \\ -(1+x) \end{pmatrix}$$

La famille $rg(u, v, w)$ est echelonnée ssi $x = -1$

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^5$

Calculer le rang de la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) où

$$V_1 = (1, 0, 0, 0, 0); V_2 = (0, 1, 0, 0, 0); V_3 = (0, -2, 0, 0, 0); V_4 = (2, 1, 2, 0, 0); V_5 = (-1, 0, -1, 0, 0)$$