

ESPACES VECTORIELS

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Structure d'un espace vectoriel



DÉFINITION

On appelle un $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** tout ensemble E muni de deux opérations **l'addition** et la **multiplication par scalaire** :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

- $(E, +)$ est un **groupe abélien**.
- **Associativité** : $\lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$
- **Élément neutre** : $1_{\mathbb{K}}.x = x$
- **Distributivité** : $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
- **Distributivité** : $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$

■ Les éléments de E s'appellent les **vecteurs**.

■ les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent les **scalaires**.



Espaces vectoriels usuels

■ $(\mathbb{K}^n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \bullet \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{array} \right.$$

■ $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \bullet \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda.u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

■ $(\mathbb{K}[X], +, \cdot), (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ sont des $\mathbb{K}$ -ev.

■ $(\mathcal{F}(I, E), +, \cdot)$: Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble I dans un $\mathbb{K}$ -ev E .

Proposition : Produit cartésien

$E_1, E_2, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -ev $\Rightarrow (\prod_{i=1}^n E_i, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev

■ Pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \bullet \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \\ \bullet (0_1, 0_2, \dots, 0_n) \text{ est le vecteur nul de } \prod_{i=1}^n E_i \end{array} \right.$$



Preuve

.....

Proposition : Règles de calcul dans un ev

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors :

■ $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$

■ $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$

■ $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot x = \mu \cdot x \\ x \neq 0_E \end{array} \right. \Rightarrow \dots\dots\dots$

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot x = \lambda \cdot y \\ \lambda \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \dots\dots\dots$

Preuve

.....

.....

.....

DÉFINITION : SOUS ESPACE VECTORIEL

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev .

F est dit sous espace vectoriel (**sev**) de E si on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare F \subset E \\ \blacksquare F \neq \emptyset \\ \blacksquare (\forall x, y \in F), (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}), \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{array} \right.$$

Exemples

- Dans tout $\mathbb{K}$ -ev E : $\{0_E\}$ et E sont des **sev** .
- $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un **sev** de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$



.....

.....

.....

.....

- $\mathbb{K}_n[X]$ est un **sev** de $(\mathbb{K}[X], +, .)$



.....

.....

.....

.....

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des **sev** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$



.....

.....

.....

.....

.....

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\} \quad a, b \in \mathbb{R}$



.....

.....

.....

■ **En général :** $F = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0 \right\}$ est un

★ EXERCICE

Montrer que les ensembles sont des sev dans chacun des cas suivants .

- $F_2 = \left\{ \text{L'ensemble des suites négligeable devant } \frac{1}{n} \right\}$.
- $F_3 = \left\{ y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), y' + 2xy = 0 \right\}$.



Remarques

- La condition 3) de la définition est équivalente à $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (\forall x, y \in F), \quad x + y \in F \\ \bullet (\forall x \in F), (\forall \lambda \in \mathbb{K}), \quad \lambda.x \in F \end{array} \right.$

- Tout **sev** F de E contient le **vecteur nul** ($0_E \in F$)

$0_E \notin F \Rightarrow \dots\dots\dots$



Exemples

- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$



.....

- $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 1\}$



.....

- $F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A^2 = A\}$



.....

.....

.....



EXERCICE

Montrer que les ensembles sont des sev dans chacun des cas suivants .

- $F_1 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$.
- $F_2 = \left\{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$
- $F_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A + \text{tr}(A)I_n = 0\}$.
- $F_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|\}$



Remarques

- Tout sev F est **stable par combinaison linéaire** .

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in F$$

- F est un **sev** de $E \iff (F, +, \cdot)$ est un **K-ev**



Exemples

- $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$, est un $\mathbb{K}$ -ev
- $(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, $(\mathcal{T}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, $(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, $(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ sont des $\mathbb{K}$ -ev



Proposition : L'intersection $\cap$

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$ -e.v E .

- F et G deux sev de $E \Rightarrow F \cap G$ est un sev de E .
- $F_1, \dots, F_n$ des sev de $E \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de E .



Preuve



Exemples

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{C}^3$



**EXERCICE**

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$ -e.v E . Montrer que

$$F \cup G \text{ sev de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

**Solution**

.....

.....

.....

.....

.....

2. Somme de deux sev**DÉFINITION :SOMME DE DEUX SEV**

La somme de deux sev F et G de E .

$$F + G \stackrel{\text{déf}}{=} \{a + b \mid (a, b) \in F \times G\}$$

Par conséquent :

$$x \in F + G \stackrel{\text{déf}}{\iff} \dots\dots\dots$$

**Remarque**

$$\bullet F \subset F + G$$

$$\bullet G \subset F + G$$

$$\bullet F \cup G \subset F + G$$



.....

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev .

La somme $F + G$ de deux sev F et G est un sev de E

Preuve

Exemples

$F = \mathbb{R}_1[X]$ et $G = \mathbb{R}X^3$ sont des sev de $\mathbb{R}[X]$

$$H = \{a + bX + cX^3 / a, b, c \in \mathbb{R}\} = \dots\dots\dots$$

DÉFINITION :SOMMES DIRECTES

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F et G deux sev de E

■ La somme $F + G$ est dite **directe** Si on a :

$$F \cap G = \{0_E\}$$

• Dans ce cas on note :

$$F + G = F \oplus G$$

Exemples

■ Dans le $\mathbb{R}$ -ev $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, La somme $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$ est **directe**

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \dots\dots\dots \\ \bullet \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

■ Dans le $\mathbb{R}$ ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est **directe**





DÉFINITION : SEV SUPPLÉMENTAIRES

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et F et G deux sev de E

■ On dit F et G sont **supplémentaires** dans E , si on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare F \cap G = \{0_E\} \\ \blacksquare E = F + G \end{array} \right.$$

• Dans ce cas on note :

$$E = F \oplus G$$



EXERCICE

On note $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ paire}\}$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ impaire}\}$

1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R})$.



Solution



Exemple

Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$



Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et F et G deux sev de E

$$E = F \oplus G \iff (\forall x \in E), (\exists!(a, b) \in F \times G), / x = a + b$$



Preuve

3. Famille de vecteurs



DÉFINITION

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, I, J deux ensembles non vides.

- Une famille de vecteurs de E indexée par I sera notée $(x_i)_{i \in I} \in E^I$.

Si $J \subset I$, On dit $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (x_i)_{i \in J} \text{ est une } \mathbf{sous-famille} \text{ de la famille } (x_i)_{i \in I} \\ \bullet (x_i)_{i \in I} \text{ est une } \mathbf{sur-famille} \text{ de } (x_i)_{i \in J} \end{array} \right.$

- Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires indexée par I .

$(\lambda_i)_{i \in I}$ est dite **presque nulle** si tous ses éléments sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

c-à-d : l'ensemble $\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$ est



Exemples

- $(1, X, \dots, X^n)$ est une **sous-famille** de $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$
- $(e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est une **sur-famille** de $(e^{kx})_{k \in \mathbb{N}}$



Remarque

- Cas important : $I = \mathbb{N}$

$(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dite **presque nulle** $\overset{\text{déf}}{\iff}$

3.1) L'ensemble des combinaisons linéaires



DÉFINITION

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une **famille de vecteurs finie** d'un $\mathbb{K}$ -ev E

- L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille finie $(u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \mid (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$x \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \iff \dots\dots\dots$$

Exemples

■ $\text{Vect}(1, X, \dots, X^n) =$

■ $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i) =$

■ $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(1) =$

■ $\text{Vect}((1, 0), (0, 1)) =$

■ $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$

■ $(5, 12, 13) \in \text{Vect}((1, 2, 3), (1, 3, 2))$

■ $\text{Vect}(u) =$

■ $\text{Vect}(u, v) =$

■ **Famille infinie :** Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille infinie de vecteurs de E.

$\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de $(u_i)_{i \in I}$

$$\text{Vect}(u_i)_{i \in I} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i u_i / (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K} \text{ presque nulle} \right\}$$

■ $x \in \text{Vect}(u_i)_{i \in I} \iff$

■ $x \in \text{Vect}(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \iff$

Exemples

- Dans $\mathbb{K}[X]$

$P \in \text{Vect}(X^k)_{k \in \mathbb{N}} \iff \dots\dots\dots$

- Dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f \in \text{Vect}(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}} \iff \dots\dots\dots$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $(u_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou infinie) de vecteurs de E

$\text{Vect}((u_i)_{i \in I})$ est un **sev** de E

On l'appelle le **sev engendré** par la famille $(u_i)_{i \in I}$



.....

.....

.....

.....

**Exemples**

■ $F = \{a + bX + 2aX^3 / a, b \in \mathbb{R}\} =$

■ $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\} =$

■ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 3y + 2z = 0\} =$

■ $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a, b \in \mathbb{R} \right\} =$

■ $F = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / y'' + 4y = 0\} =$

■ $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0\} =$

**Remarque**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare (\forall i \in I), \quad u_i \in F \\ \blacksquare F \text{ un sev de } E \end{array} \right. \Rightarrow \text{Vect}((u_i)_{i \in I}) \subset F$$

On dit, $\text{Vect}((u_i)_{i \in I})$ est le **plus petit**, au sens de l'inclusion, **sev contenant** tous les vecteurs de la famille $(u_i)_{i \in I}$

Preuve

Exemples

On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 5y + 2z = 0\}$, $a = (-1, -1, 2)$, et $b = (2; 0; 1)$.

$$\text{Vect}(a, b) \subset F$$



Théorème : Opérations sur Vect

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev .

■ $x \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \iff \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, x) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

■ Si $x \in \text{Vect}(u_2, \dots, u_n)$ Alors $\text{Vect}(u_1 + x, u_2, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

Preuve



Exemples

■ $\text{Vect}(X, 2X + X^2, X^2) = \dots\dots\dots$

■ $\text{Vect}(1 + 2X + X^2, X, X^2) = \dots\dots\dots$

■ Dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $f_1 : x \mapsto \sin(x+1)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x)$, $f_3 : x \mapsto \cos(x)$

$\text{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$



Remarque

$\text{Vect}((u_i)_{i \in I})$ est inchangé par les opérations suivantes :

■ Si on retire les vecteurs nuls $u_i = 0$

■ $u_i \longleftrightarrow u_j$

■ $u_i \longleftarrow u_i + \lambda u_j$

■ $u_i \longleftarrow \alpha u_i \quad \alpha \neq 0$

■ **En général :** Le **sev engendré** par une partie non vide A de E :

$$\text{Vect}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k / n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (u_1, u_2, \dots, u_n) \in A^n \right\}$$

$x \in \text{Vect}(A) \iff \dots\dots\dots$

$\iff \dots\dots\dots$



L'essentiel sur $\text{Vect}(A)$

■ $\text{Vect}(A)$ est un sev de E (engendré par A) et $A \subset \text{Vect}(A)$.

■ $\left\{ \begin{array}{l} F \text{ sev de } E \\ A \subset F \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots$

■ $F \text{ sev de } E \text{ contenant } A \Rightarrow \text{Vect}(A) \subset F$.

.....

■ $\text{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sev de E contenant A .

■ $A \text{ sev de } E \Rightarrow \text{Vect}(A) = \dots\dots\dots$

■ $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \dots\dots\dots$

■ $A \subset B \Rightarrow \text{Vect}(A) \dots\dots \text{Vect}(B)$



Preuve

.....

3.2) Famille génératrice



DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $A \subset E$

La partie A est dite **génératrice** de $E \stackrel{\text{déf}}{\iff} E = \text{Vect}(A)$

En particulier : Pour $A = (u_i)_{i \in I}$

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille **génératrice** de $E \stackrel{\text{déf}}{\iff} E = \text{Vect}((u_i)_{i \in I})$



Exemples

■ Dans $\mathbb{K}_n[X]$

.....

■ Dans $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$

.....

■ Dans $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \dots\dots\dots$

■ Dans $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \dots\dots\dots$

■ Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

.....

■ Dans $\mathbb{K}[X]$

.....



Remarque

■ $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \iff$

■ $E = \text{Vect}(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \iff$

■ $E = \text{Vect}(u_i)_{i \in I} \iff$



EXERCICE

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, A et B deux parties non vides.

1. Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.
2. Montrer que $x \in \text{Vect}(A) \iff \text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$.



Solution

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Toute **sur-famille** d'une famille génératrice est



.....

.....



Exemple

$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((0, 1), (1, 0)) = \dots\dots\dots$

3.3) Famille libre - Famille liée



DÉFINITION

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$

- **Cas d'une famille finie :** $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E

La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est **libre** dans E

SSi

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \right]$$

- **Cas d'une famille infinie :** $(u_i)_{i \in I}$ de E

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est **libre** dans E $\overset{\text{déf}}{\iff}$ Toute **sous famille finie** de $(u_i)_{i \in I}$ est libre .

- Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.



Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$ la famille $((1, 0), (0, 1))$ est une famille libre .

.....

- Dans $\mathbb{R}\text{-ev } \mathbb{R}^n$: $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre .

.....

- La famille $((1, i))$ est libre dans le $\mathbb{R}\text{-ev } \mathbb{C}$ et liée dans le $\mathbb{C}\text{-ev } \mathbb{C}$.

.....

.....

■ Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}[X]$: $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille libre .

.....

.....

.....

■ Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}[X]$: $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre .

.....

.....

.....

■ Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $(E_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ est une famille libre .

.....

.....

.....

■ Dans $\mathbb{R}$ -ev $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $(\sin, \cos)$ est libre .

★ EXERCICE

On considère une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a $\deg P_k = k$.

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Solution



En général



Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est **libre**.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille libre

- $x \in \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \implies (u_1, u_2, \dots, u_n, x)$ est liée.
- $x \notin \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) \implies (u_1, u_2, \dots, u_n, x)$ est libre.



Preuve



Exemples

- La famille $(1, X, X^2, 2X^2 + X - 1)$ est
- La famille $(1, X, X^2, X^3 + 2X^2 + X)$ est
- La famille $(X, X^2, 2X + 3X^2)$ est
- La famille $(X^2, X + 1, X - 1, X)$



Méthode : Pour prouver qu'une famille est liée



- On écrit l'un des vecteurs comme combinaison linéaire finie des autres vecteurs.
- On raisonne par l'absurde, par récurrence.

★ EXERCICE

La famille (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, est-elle libre?

Solution

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Remarque

- Toute famille dont l'un de vecteur est **nul** est
- $(u_i)_{i \in I}$ est libre $\Rightarrow$
- $\forall u \in E / \{0_E\}$ (u) est une famille
- (u, v) est liée $\iff$

Propriétés

- Une sur famille d'une famille liée est
- Une sous famille d'une famille libre est

3.4) Base d'un espace vectoriel

DÉFINITION

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E

$(u_i)_{i \in I}$ est une base de $E \overset{\text{déf}}{\iff} (u_i)_{i \in I}$ est **libre** et **génératrice** de E



Bases canoniques usuelles

- Dans $\mathbb{K}_n[X] : (1, X^2, \dots, X^n)$ est une base (base canonique) de $\mathbb{K}_n[X]$.

.....

.....

- Dans $\mathbb{K}^n : (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base (base canonique) de $\mathbb{K}^n$.

.....

.....

- Dans $\mathbb{K}[X] : (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base (base canonique) de $\mathbb{K}[X]$.

.....

.....

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : (E_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ est une base (base canonique) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

.....

.....

Proposition : Notion de coordonnées

Soit $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille finie d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

$$B \text{ est une base de } E \stackrel{\text{déf}}{\iff} \forall x \in E \quad \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^n x_k u_k$$

On note $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$, on l'appelle les coordonnées de x dans la base B



Preuve

.....

.....

.....

.....



À bien retenir



Pour qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ soit **une base** de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}((u_i)_{i \in I})$ il suffit qu'elle soit



Exemple

■ La famille $(\cos, \sin)$ est une base de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$





EXERCICE



Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et soit (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

1. Justifier que la famille $B = ((X - a)^k)_{0 \leq k \leq 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $(X - a)^n(X - b)^n$ dans la base B .



Solution

★ EXERCICE

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres distincts de $\mathbb{K}$.

1. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, montrer qu'il existe unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifiant

$$(\forall j \in \{0, \dots, n\}), L_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On donnera une expression explicite de L_i .

2. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

★ EXERCICE

1. Soit p et q , deux entiers naturels : calculer l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \sin(pt) \sin(qt) dt$$

2. Montrer que la famille $(f_k : x \rightarrow \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est libre (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
3. Que dire de la famille $(f_k : x \rightarrow \sin(kx))_{0 \leq k \leq n}$?

Solution

.....

.....

.....

.....