

CONVEXITÉ

- I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.
- a et b sont deux réels tels que $a < b$.

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b; \lambda \in [0, 1]\}$$

1. Fonctions réelles convexes-concaves



DÉFINITION : Fonction convexe

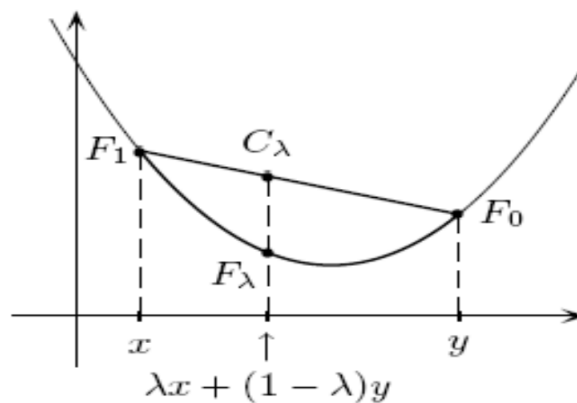
■ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$



Interprétation géométrique

f est **convexe** si et seulement si tout arc de sa courbe est situé **en dessous** de la corde correspondante.



Exemple

La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda| \cdot |x| + |1 - \lambda| \cdot |y| = \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|.$$



DÉFINITION : Fonction concave

f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe. (i.e)

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Ce qui signifie que tout arc de sa courbe est situé **au dessus** de la corde correspondante.



Exemple

La fonction ℓn est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda \in [0, 1], \quad \ell n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \ell n(x) + (1 - \lambda)\ell n(y)$$



Remarque

■ Si f est **convexe**, alors

$$\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

■ Si f est **concave**, alors

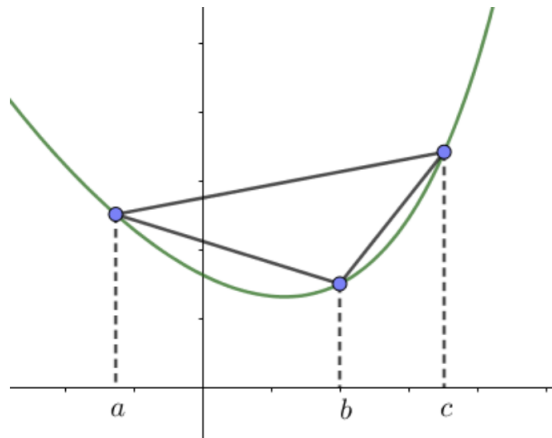
$$\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

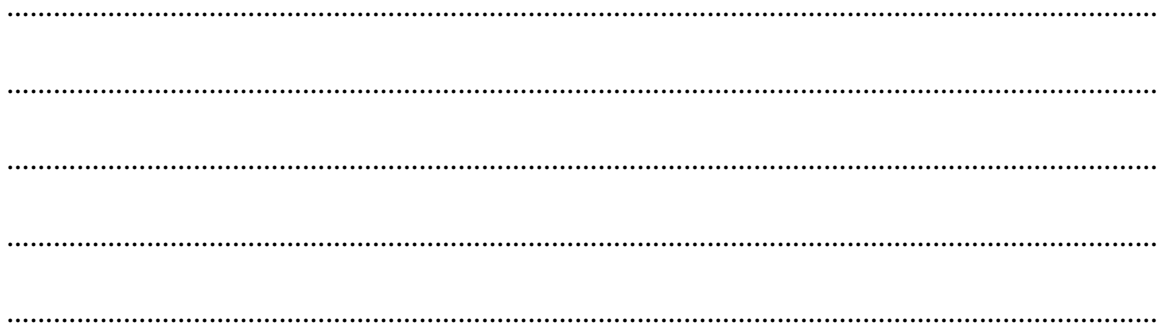
Propriété : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est **convexe** sur I .
- (ii) **Inégalité des trois cordes** : si pour tous $a, b, c \in I$, $a < b < c$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$





1. $f : x \rightarrow \frac{e^x - 1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^*$
2. $g : x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi]$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **dérivable** sur I .

- f est **convexe** si et seulement si f' est **croissante** sur I
- f est **concave** si et seulement si f' est **décroissante** sur I

[illegible]



Corollaire : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **deux fois dérivable** sur I .

- f est **convexe** si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .
- f est **concave** si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I .



Exemples

-
-
-

Propriété : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **dérivable** sur I .

- f est **convexe** si et seulement si son graphe est **au-dessus** de toutes ses tangentes. (i.e)

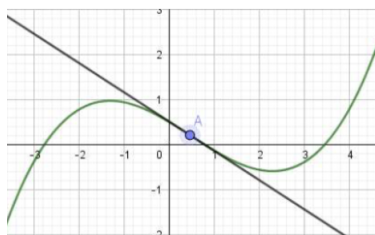
$$\forall (x, a) \in I^2, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

- f est **concave** si et seulement si son graphe est **en dessous** de toutes ses tangentes. (i.e)

$$\forall (x, a) \in I^2, \quad f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)$$

[illegible]

f admet un **point d'inflexion** en a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .



Propriété : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

■ Si f est **convexe**,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

■ Si f est **concave**,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$



Preuve

[illegible]





En particulier

■ Si f est **convexe**,

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

■ Si f est **concave**,

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

2. Exercices d'entraînement



EXERCICE 1

1. Montrer que : $\forall x > -1, \ln(x+1) \leq x$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] x \frac{2}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.
3. Montrer que $\forall x \in [0, 1] \quad 1+x \leq e^x \leq 1+x(e-1)$



EXERCICE 2

Soit f et g convexes sur $\mathbb{R}$, et g croissante.

1. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Application : Montrer que f convexe avec $f(x) = (1+x)^x$.



EXERCICE 3

Montrer que $\forall a, b \geq 1, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$

★ EXERCICE 4

Soit f , définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$

1. Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire, $\forall a, b, x, y \in]0, +\infty[$ $x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$

★ EXERCICE 5

Soit $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$

1. Montrer que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

2. Montrer que

$$\frac{n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n}$$

3. montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

4. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

★ EXERCICE 6

Soit $p, q \in]0, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

1. Montrer que : $\forall x, y \in]0, +\infty[, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$
2. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in]0, +\infty[$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$,

Montrer que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$

3. Soit $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in]0, +\infty[$, Montrer l'inégalité de Holder :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

4. Soit $p > 1$. Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$