LYCÉE MÉDITERRANÉEN

PRÉPARATION CONCOURS

Mercredi 04 octobe 2023

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}$ si et seulement si z est imaginaire pur.

EXERCICE 2

1. Déterminer des racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 3

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\alpha = \omega + \dfrac{1}{\omega}$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\omega^2} + \dfrac{1}{\omega} + 1 + \omega + \omega^2 = 0$.
2. En déduire que α est solution d'une équation du second degré que l'on précisera.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 4

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\,\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}$.
2. Résoudre l'équation $(z-1)^5 = (z+1)^5$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction cotan.

EXERCICE 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \qquad (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

1. Montrer que si z est solution de E, alors $|1+iz| = |1-iz|$. En déduire que $z \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
3. Soit $z \in \mathbb{R}$. On pose $z = \tan\phi$ avec $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Ecrire une équation d'inconnue ϕ équivalente à (E) et la résoudre.
4. Résoudre alors l'équation (E).

EXERCICE 6 Théorème des angles inscrits

Soient A, B, C, D quatre points du plan distincts deux à deux. On suppose de plus A, B, C non alignés et on introduit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O circonscrit au triangle ABC.

On choisit un repère orthonormé du plan de centre O tel que $\mathscr{C}$ ait pour rayon 1 .

On note a, b, c, d les affixes respectifs de A, B, C, D.On pose enfin $Z = \frac{d-a}{c-a}\frac{c-b}{d-b}$.

1. Dans cette question, on suppose que D appartient à $\mathscr{C}$.
   (a) Justifier que $\overline{a} = \frac{1}{a}, \overline{b} = \frac{1}{b}, \overline{c} = \frac{1}{c}, \overline{d} = \frac{1}{d}$.
   (b) Montrer que Z est un réel.
   (c) En déduire que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$.

   Réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]$ et on veut montrer que D appartient à $\mathscr{C}$.
2. Que peut-on dire de Z?
3. Exprimer d en fonction de a, b, c, Z.
4. Calculer $\overline{d}$ et en déduire que D appartient à $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c.

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si
$$a + jb + j^2c = 0,$$
et équilatéral indirect si et seulement si
$$a + jc + j^2b = 0.$$
2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$