LYCÉE MÉDITERRANÉEN

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

Samedi 23 novembre 2024

Durée : 4 heures

N.B :Les élèves sont invités à porter une attention particulière à la qualité de la rédaction et de la présentation. La référence des questions doit être mentionnée et les résultats doivent être encadrés.

Si, au cours de l'épreuve, un élève repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1.

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t)^2 - f(t)^2 = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

EXERCICE 2.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 + \int_0^x t f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 3.

Soient f, a et b trois fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction a est positive et on note A une primitive de a sur $\mathbb{R}_+$. On suppose enfin que pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq f(x) \leq b(x) + \int_0^x a(t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction $\mathrm{H} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x a(t) f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie une équation différentielle de la forme : $\mathrm{H}' - a\mathrm{H} = ab + \varphi$, où φ est une fonction continue et négative sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire : $\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq b(x) + e^{\mathrm{A}(x)} \displaystyle\int_0^x a(t) b(t) e^{-\mathrm{A}(t)}\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 4.

Soient a et b deux nombres réels. Les parties suivantes sont-elles majorées ? minorées ? Dans un tel cas, quelles sont leurs bornes supérieures et inférieures ?

$$\left\{(-1)^n a + \frac{b}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^\star\right\} \quad \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$$

EXERCICE 5 : DENSITÉ DE $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ DANS $\mathbb{R}$.

Soit $a \notin \mathbb{Q}$, on note $\mathrm{A} = \mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \{p + aq \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que la différence de deux éléments de A est un élément de A.
2. Justifier l'existence de $m = \inf\left(\mathrm{A} \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.
3. L'objectif de cette question est de montrer par l'absurde que $m = 0$. On suppose que $m > 0$
   (a) Montrer qu'il existe $b, b' \in \mathrm{A}$ tels que $m < b < b' < 2m$.
   (b) En déduire une contradiction.
4. L'objectif de cette question est de montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.
   (a) Rappeler la définition de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Soient $x, y \in \mathbb{R}, x < y$
   (b) Montrer qu'il existe $c \in \mathrm{A}$ tel que $0 < c < y - x$.
   (c) Montrer que $b = \left\lfloor \frac{x}{c} \right\rfloor c + c$ est un élément de A appartenant à $]x, y[$ et conclure.
5. **Utilisation :**
   Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$, montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME 1.

On pose à présent $\ell(0) = 1$ et pour tout $t \in]0, 1[$: $\quad \ell(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$.

1. Montrer que ℓ est continue sur $[0, 1[$
   On appelle alors fonction dilogarithme la fonction Li_2 définie pour tout $x \in [0, 1[$ par :
$$\mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x \ell(t)\mathrm{dt}$$
2. (a) Montrer que Li_2 est dérivable sur $[0, 1[$ et étudier sa monotonie.
   Cette monotonie prouve que Li_2 possède une limite en 1 , éventuellement infinie. Le théorème sous-jacent s'appelle le théorème de la limite monotone et on l'admet pour le moment.
   (b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$: $\quad -\ln(1-t) < \dfrac{t}{1-t}$, puis que $\ell(t) < 1 - \ln(1-t)$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$: $\quad \mathrm{L}i_2(x) \leq 2x + (1-x)\ln(1-x)$, puis que la limite de $\mathrm{L}i_2$ en 1 est finie.

3. (a) Montrer que pour tous $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,du$$

(b) En déduire que pour tous $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \le -\ln(1-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \le \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

(c) En déduire que pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \le \mathrm{L}i_2(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \le \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

(d) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} = \mathrm{L}i_2(x)$, mais aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le \lim_{x\to 1} \mathrm{L}i_2(x)$.

(e) Montrer que Li_2 est majorée par $\frac{\pi^2}{6}$ sur $[0,1[$, puis en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 1} \mathrm{Li}_2(x)$.

4. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln x \ln(1-x)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $\quad \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x)$.

(c) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k^2}$.

PROBLÈME 2.

I : Équation différentielle non linéaire $xy' - |y| = x^2$

On s'intéresse à l'équation différentielle $\mathscr{E}$: $\quad xy' - |y| = x^2 \quad$ qu'on souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$.

1. **Préliminaires :** On note $\mathscr{E}^-$ l'équation différentielle : $xy' - y = x^2$ et $\mathscr{E}^+$ l'équation différentielle : $\quad xy' + y = x^2$.
   Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou dans $\mathbb{R}_-^*$.
   (a) Résoudre $\mathscr{E}^-$ sur I.
   (b) Résoudre $\mathscr{E}^+$ sur I.
2. **Résolution de $\mathscr{E}$ sur R_+^*** :
   (a) Déterminer les solutions strictement positives de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que $\mathscr{E}$ ne possède pas de solution strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Soit y une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; On suppose que y n'est pas strictement positive.
      i. Montrer que y est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
      ii. Montrer que y s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un certain point α.
      iii. Déduire du signe de y que pour tout $x > 0$: $\quad y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-\alpha^3}{3x} & \text{si} \quad x < \alpha \\ x(x-\alpha) & \text{si} \quad x > \alpha \end{cases}$
      iv. Que vaut la limite de y en 0^+ ?
   (d) Réciproquement, soit $\alpha > 0$. On note y la fonction obtenue en **c)iii)**. D'après tout ce qui précède, y est solution de $\mathscr{E}$ sur $]0,\alpha[$ et sur $]\alpha,+\infty[$. Montrer que y est dérivable en α en étudiant son taux d'accroissement en α à gauche et à droite. En déduire que y est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.

(e) Quelles sont finalement toutes les solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

3. **Résolution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$:**
   (a) Soit y une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
      i. Montrer, en exploitant les resultats précédents, que y est de la forme $x \longrightarrow x(x+\lambda)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour un certain $\lambda \geq 0$.
      ii. Montrer que $x \longmapsto y(-x)$ est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire finalement les solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II : Solutions périodiques

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\psi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique de période $\mathrm{T} > 0$.
On s'intérese à l'équation différentielle (F) : $\quad y' + ay = \psi \quad$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Montrer que pour toute solution de (F), la fonction $x \longrightarrow y(x+\mathrm{T})$ est aussi solution (F).
5. Soit y une solution de (F) . Montrer que y est T-périodique si et seulement si : $y(0) = y(\mathrm{T})$.
6. Montrer que (F) possède une et une seule solution T-périodique.

III : Équation fonctionnelle $\quad f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y)$

On se propose de déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y) \qquad \text{(G)}$$

7. Soit f une solution (G) . On fait l'hypothèse supplémentaire que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et n'est pas identiquement nulle.
   (a) Que vaut $f(0)$?
   (b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
   $$f''(x+y)f(x-y) = f(x+y)f''(x-y)$$
   (c) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$; $\quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.
   (d) En déduire que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$: $\quad f'' + \alpha f = 0$, puis déterminer, en fonction de α, une expression explicite de f.
8. Verifier que les fonctions trouvées en **7)d)** sont bien solutions de (G).
9. Soit f une solution de (G) non identiquement nulle.
   (a) Montrer que pour un certain $z \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^z f(t)\mathrm{d}t \neq 0$.
   (b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 - f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 = f(x)f(y)$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_x^{x+z} f\left(\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \int_x^{x-z} f\left(\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = f(x)\int_0^z f(t)\mathrm{d}t$.
   (d) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que f est même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
10. Quelles sont finalement toutes les solutions de (G) ?