



LYCÉE MÉDITERRANÉEN

Devoir Surveillé de Mathématiques N° : 2

Exercice 1

Soit a, b, n des nombres entiers, on pose

$$D_a = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = a\}$$

$$T_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$$

$$C_n = \{0, 1, \dots, n\}^2$$

Donner une expression simple des sommes suivantes

$$A_a = \sum_{(i,j) \in D_a} \binom{i}{i+j}$$

$$B_n = \sum_{(i,j) \in T_n} \binom{i}{i+j}$$

$$G_{b,n} = \sum_{i=0}^n \binom{i}{i+b}$$

$$D_n = \sum_{(i,j) \in C_n} \binom{i}{i+j}$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul, P_n désigne l'ensemble des entiers pairs entre 0 et n et I_n désigne l'ensemble des entiers impairs entre 0 et n . On associe à chaque paramètre complexe $a \neq 0$ deux équations d'inconnue z notées $E_0(n, a)$ et $E_1(n, a)$

$$E_0(n, a) : \sum_{k \in P_n} \binom{n}{k} z^k a^{n-k} = 0$$

$$E_1(n, a) : \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} z^k a^{n-k} = 0$$

1. **Cas particuliers.** Former les six équations obtenues pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$. Dans chaque cas, donner l'ensemble des solutions.
2. Soit λ un nombre complexe non nul, montrer que w est solution de $E_0(n, a)$ si et seulement si λw est solution de $E_0(n, \lambda a)$
3. a. Discuter selon le paramètre complexe w et donner l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue z

$$\frac{a+z}{a-z} = w$$

- b. Pour α réel et $w = e^{i\alpha}$, simplifier

$$\frac{w-1}{w+1}$$

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue z

$$\left(\frac{a+z}{a-z}\right)^n = 1$$

On exprimera chaque solution sous une forme simple.

d. En considérant $(z+a)^n$ et $(-z+a)^n$ résoudre l'équation $E_1(n, a)$.

4. **Une autre idée.**

a. Soit x et y deux nombres réels, exprimer avec des sommes les parties réelle et imaginaire de $(x+iy)^n$.

b. Montrer que lorsque θ est un réel tel que $\cos \theta \neq 0$:

$$\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n \theta} = \sum_{k \in P_n} \binom{n}{k} (i \tan \theta)^k$$

$$\frac{i \sin(n\theta)}{\cos^n \theta} = \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} (i \tan \theta)^k$$

c. En déduire les solutions de $E_1(n, 1)$ puis retrouver celles de $E_1(n, a)$ déjà obtenues en 3.d.

d. Se déterminer les solutions de $E_0(n, i)$ puis de $E_0(n, a)$.

Problème

L'objet de ce problème est de présenter la formule de **Machin** et quelques résultats autour.

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

On obtiendra diverses formules faisant intervenir des arctan d'inverses de nombres. En particulier, une formule du type **Machin** est de la forme

$$m \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{y} \equiv \frac{\pi}{4}$$

avec m, x, y entiers. Pour tout entier naturel non nul m , on appelle $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des couples de réels non nuls (x, y) tels que

$$m \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$$

Partie I. Exemples

1. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

2. (a) Exprimer $\tan 4x$ en fonction de $\tan x$.

(b) En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

3. Pour x réel non nul, on pose $\alpha = \arctan \frac{1}{x}$.

(a) Exprimer $x+i$ à l'aide de α et de l'exponentielle complexe.

(b) Donner un argument de $x+i$ en fonction α

4. Montrer que $(x, y) \in \mathcal{C}_m \iff (x+i)^m (y+i) e^{-i\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7}.$$

6. Soit p, q, r trois réels positifs tels que $1+p^2=qr$. Montrer que

$$\arctan \frac{1}{p} = \arctan \frac{1}{p+r} + \arctan \frac{1}{p+q}.$$

Partie II. Étude d'une famille de polynômes

Pour x réel et m entier, on note respectivement $A_m(x)$ la partie réelle et $B_m(x)$ la partie imaginaire de $(x+i)^m$. On définit également F_m par :

$$F_m(x) = \frac{A_m(x) + B_m(x)}{A_m(x) - B_m(x)}.$$

1. Calculer $A_k(x)$ et $B_k(x)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Montrer que

(a)

$$A_{m+1}(x) = xA_m(x) - B_m(x)$$

$$B_{m+1}(x) = A_m(x) + xB_m(x).$$

(b)

$$A_m(-x) = (-1)^m A_m(x)$$

$$B_m(-x) = -(-1)^m B_m(x)$$

(c)

$$A'_m(x) = mA_{m-1}(x)$$

$$B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$$

(A'_m et B'_m sont les dérivées de A_m et B_m)

(d) Si m est impair

$$A_m(x) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} x^m A_m\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$B_m(x) = -(-1)^{\frac{m-1}{2}} x^m B_m\left(-\frac{1}{x}\right)$$

(e) Si m est pair

$$A_m(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} x^m A_m\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$B_m(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} x^m B_m\left(-\frac{1}{x}\right)$$

3. Montrer que les solutions de l'équation $A_m(x) = B_m(x)$ sont $\cot\left(\frac{\pi}{4m} + \frac{k\pi}{m}\right)$ avec $0 \leq k \leq m-1$.
4. Montrer que la fonction F_m est décroissante dans chaque intervalle de son domaine de définition. Quelle est la limite de F_m en $+\infty$ et en $-\infty$?

Partie III. Les formules du type Machin

On se propose de trouver toutes les formules du type **Machin** pour m entier entre 1 et 4.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow ze^{-\frac{\pi}{4}i} \in \mathbb{R}$$

2. Montrer que $(x, y) \in \mathcal{C}_m$ si et seulement si

$$A_m(x) \neq B_m(x)$$

$$y = F_m(x)$$

3. Les calculs numériques des $F_m(x)$ conduisent aux tableaux suivants :

x	1	2	3	4	5	6	7
$F_1(x)$		3.	2.	1.667	1.500	1.400	1.333
$F_2(x)$	-1.	-7.	7.	3.286	2.429	2.043	1.824
$F_3(x)$	0.	-1.444	-5.500	19.80	5.111	3.352	2.659
$F_4(x)$	1.	-5.484	-1.824	-5.076	-239.0	7.971	4.518

x	8	9	10	11	12	13
$F_1(x)$	1.286	1.250	1.222	1.200	1.182	1.167
$F_2(x)$	1.681	1.581	1.506	1.449	1.403	1.366
$F_3(x)$	2.286	2.052	1.891	1.774	1.684	1.613
$F_4(x)$	3.376	2.802	2.455	2.222	2.055	1.929

À partir de ces tableaux, former (en justifiant soigneusement) toutes les formules du type **Machin**.

Partie IV. Algorithme de Lehmer.

Soit z_0 un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive. On définit des complexes $z_1, z_2, \dots$ par récurrence en posant

$$z_{k+1} = z_k \left(-E \left(\frac{\operatorname{Re}(z_k)}{\operatorname{Im}(z_k)} \right) + i \right) \quad \text{lorsque } \operatorname{Im}(z_k) \neq 0$$

La notation E désignant la fonction partie entière. Le procédé s'arrête si nombre réel est obtenu. On pourra noter

$$n_k = E \left(\frac{\operatorname{Re}(z_k)}{\operatorname{Im}(z_k)} \right)$$

1. Montrer que la suite formée par les parties imaginaires des z_k est strictement décroissante et à valeurs positives.
2. On suppose que $z_0 = a + ib$ avec a et b entiers strictement positifs.
 - (a) Montrer qu'il existe un k tel que z_k est réel.
 - (b) En déduire que

$$\arctan \left(\frac{b}{a} \right) \equiv \arctan \left(\frac{1}{n_0} \right) + \arctan \left(\frac{1}{n_1} \right) + \dots + \arctan \left(\frac{1}{n_{k-1}} \right) [\pi]$$

On remplacera $\arctan \left(\frac{1}{n_k} \right)$ par $\frac{\pi}{2}$ lorsque $n_k = 0$.

3. Effectuer les calculs pour $z = 20 + 3i$. En déduire :

$$\arctan \frac{3}{20} = \arctan \frac{1}{6} - \arctan \frac{1}{62} - \arctan \frac{1}{7628}$$

FIN