

DEVOIR MAISON N° 1

À rendre le 17 septembre

EXERCICE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$. On propose de chercher les fonctions strictement monotones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

Dans la suite on suppose que f est une solution

1. Montrer que f est injective.
2. En déduire que $f(0) = 0$.
3. Obtenir une contradiction si n est pair.
4. Déterminer $f \circ f$ puis en déduire que f est surjective.
5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Indication : Considérer $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^n = f(y)$.

6. On pose $c = f(1)$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = cn$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $f(n) = cn$.
 - (c) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $f(r) = cr$.
 - (d) On admet que $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déduire une contradiction.

PROBLÈME 1 : LES PREMIÈRES INÉGALITÉS DE SHAPIRO.

1. Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}$$

 Par une récurrence facile (que **l'on ne vous demande pas de rédiger**), on montre de la même façon que, pour tout entier $n \geq 2$, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \quad (\star)$$

2. **Inégalité de Nesbitt = Shapiro III.** Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que $3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2$.

(b) En utilisant (★), en déduire $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

3. **Inégalité de Shapiro IV.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que $2[a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)] \leq (a+b+c+d)^2$.

(b) En déduire $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$.

4. **Inégalité de Shapiro V.** Soit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}$$

5. **Inégalité de Shapiro VI.** Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$.

(b) En déduire

$$\begin{aligned} a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b) \\ \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad + be + cf) \end{aligned}$$

(c) Montrer

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3$$

6. **Extension des inégalités de Shapiro.** Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que les sommes $\alpha + \beta, \beta + \gamma$ et $\alpha + \gamma$ soient **strictement** positives.

En appliquant la question 2 b à des nombres strictement positifs bien choisis, montrer

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$$

On pourra utiliser le théorème de passage à la limite des inégalités larges : si une suite **convergente** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un nombre réel $m \in \mathbb{R}$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq m$.

PROBLÈME 2

Partie I : Théorème de Knaster-Tarski

Soit E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E) : X \subset Y \implies f(X) \subset f(Y)$$

($f(X)$ est l'image de l'élément X par f) On note.

$$\mathcal{U} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid f(X) \subset X\}$$

- Justifier que $\mathcal{U}$ est non vide.
- Montrer que pour tout $X \in \mathcal{P}(E) : X \in \mathcal{U} \implies f(X) \in \mathcal{U}$.
- Montrer que pour tout $X, Y \in \mathcal{U} : X \cap Y \in \mathcal{U}$.

4. On note A l'intersection de toutes les parties de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire

$$A = \bigcap_{X \in \mathcal{U}} X$$

Montrer que $A \in \mathcal{U}$.

5. Montrer que $f(A) = A$.

Partie II : Théorème de Cantor-Bernstein

Soient S et T deux ensembles. On suppose qu'il existe des applications $f : S \rightarrow T$ et $g : T \rightarrow S$ injectives, et on propose de montrer qu'il existe une application $h : S \rightarrow T$ bijective.

1. Soit l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(T) &\rightarrow \mathcal{P}(T) \\ Y &\mapsto (T \setminus f(S)) \cup f(g(Y)) \end{aligned}$$

- (a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{P}(T)$ tel que $\Phi(A) = A$.
- (b) Soient $C, D \in \mathcal{P}(T)$. Montrer que $f(C) \cap \overline{f(D)} = f(C \setminus D)$.
- (c) En déduire que $T \setminus Y = f(S \setminus g(Y))$.

2. Soit $h : S \rightarrow T$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} y & \text{si } x \in g(A), \text{ c'est-à-dire } x = g(y) \text{ pour un certain } y \in A \\ f(x) & \text{si } x \in S \setminus g(A) \end{cases}$$

- (a) Montrer que h est bien définie.
- (b) Montrer que h est injective.
- (c) Montrer que h est surjective.

Indication : Discuter les cas $y \in T \setminus Y$ et $y \in Y$.