

DEVOIR LIBRE N° 1

EXERCICE 1

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{2k} = 2u_k \\ u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} \end{cases}$$

Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 2 : Inégalité arithmético-géométrique à n arguments.

1. Principe de récurrence de Cauchy. Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$ un ensemble vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) $1 \in A$
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$;
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$.

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.

Indication. On pourra notamment montrer $\forall p \in A, [1, p] \subseteq A$.

2. **Inégalité arithmético-géométrique.** Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^n$, alors

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

3. **Application.** Soit $n \geq 1$. En appliquant la question précédente à $n+1$ réels positifs bien choisis, montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$

Qu'en déduit-on sur la suite $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \geq 1}$?

PROBLÈME

On propose de chercher les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x)f(y)) = f(xy) - f(x+y).$$

Dans la suite, on suppose f est une fonction solution.

Partie I

- Vérifier que $-f$ est aussi une solution.
- On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que f est identiquement nulle : $f = 0$.
Dans la suite on suppose que $f(0) \neq 0$.

3. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Montrer que $c = 1$.

Partie II

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f\left(f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0$$

5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

et que $f(1) = 0$.

6. Donner les valeurs possibles de $f(0)$ et expliquer pourquoi on peut se ramener au cas $f(0) = -1$?

Dans la suite, on suppose dorénavant que $f(0) = -1$.

7. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f(x+n) = f(x) + n$.

Partie III

8. On propose de montrer que f est injective. Soient $u, v \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = f(v)$.

(a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$u + n = ab \text{ et } v + n + 1 = a + b$$

(b) Montrer que $f(f(a)f(b) + 1) = 0$.

(c) En déduire que $f(a)f(b) = 0$.

(d) Conclure que f est injective.

9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x)f(1-x) = x(1-x)$.

(b) $f(x)f(-x) = -x^2 + 1$.

10. Montrer que $f(x) = x - 1$ puis en déduire toutes les fonctions f solutions.