LYCÉE MÉDITERRANÉEN

KHOLLE DE MATHÉMATIQUES (MPSI 2)

SEMAINE 37 : Mercredi 18 Septembre 2024

Heure : 12h13h

INTERROGATEUR :A.HASNI

Sujet 1

Montrer que pour tous $x, y, z > 0$:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

Sujet 2

Une suite réelle $(u_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq n_0, \quad \left|u_n - u_p\right| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Comparer cette définition avec la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq n_0, \quad \left|u_n - u_p\right| < \varepsilon.$$

3. Comparer cette définition avec la suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - u_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

4. Écrire la négation de la définition de suite de Cauchy.

LYCÉE MÉDITERRANÉEN

KHOLLE DE MATHÉMATIQUES (MPSI 2)

SEMAINE 37 : Mercredi 18 Septembre 2024

Heure : 12h13h

INTERROGATEUR : A.HASNI

Sujet 3

Considérons les deux propositions suivantes pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f admet une limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$ si

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \quad f(x) \geq A$$

Montrer que si f admet une limite finie en a, alors f ne tend pas vers $+\infty$ en a.

Sujet 4

Soient x, y et$z$, trois réels . Montrer que

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \Longrightarrow e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0.$$

LYCÉE MÉDITERRANÉEN

KHOLLE DE MATHÉMATIQUES (MPSI 2)

SEMAINE 37 : Mercredi 18 Septembre 2024

Heure : 12h13h

INTERROGATEUR : A.HASNI

Sujet 5

Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n)f(m)$$

Sujet 6

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$$

1. Montrer qu'il existe une fonction T-périodique non constante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que toute fonction T-périodique est également nT-périodique.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et croissante.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est constante sur l'intervalle $[0, nT]$.
   (b) En déduire que f est constante.