LYCÉE MÉDITERRANEÉN

KHOLLE DE MATHÉMATIQUES (MPSI 2)

SEMAINE 39 : Mercredi 25 Septembre 2024
Heure : 12h13h

INTERROGATEUR :A.HASNI

Sujet 1

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application . Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$

Sujet 2

Soit $f : E \to F$. On définit $\Phi : \begin{cases} \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(F) \\ A \longmapsto f(A) \end{cases}$ et $\Psi : \begin{cases} \mathscr{P}(F) \longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ B \longmapsto f^{-1}(B) \end{cases}$

Montrer que :

1. f est injective $\Leftrightarrow \Phi$ est injective $\Leftrightarrow \Psi$ est surjective.
2. f est surjective $\Leftrightarrow \Phi$ est surjective $\Leftrightarrow \Psi$ est injective.

LYCÉE MÉDITERRANÉEN

KHOLLE DE MATHÉMATIQUES (MPSI 2)

SEMAINE 39 : Mercredi 25 Septembre 2024
Heure : 12h13h

INTERROGATEUR : A.HASNI

Sujet 3

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application .

1. Caractériser de l'injectivité par $f^{-1}(f(\mathrm{A}))$
2. Montrer que : f bijective $\Longleftrightarrow \forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$; $f(\overline{\mathrm{A}}) = \overline{f(\mathrm{A})}$.

Sujet 4

Soit E un ensemble non vide et $f : \mathscr{P}(\mathrm{E}) \to \mathbb{R}^{+}$ telle que :

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \Longrightarrow f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B})$$

1. Montrer que $\quad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2, \quad f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$;
2. Montrer que $\quad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2, \quad \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Longrightarrow f(\mathrm{A}) \leqslant f(\mathrm{B})$.

LYCÉE MÉDITERRANÉEN

KHOLLE DE MATHÉMATIQUES (MPSI 2)

SEMAINE 39 : Mercredi 25 Septembre 2024
Heure : 12h13h

INTERROGATEUR : A.HASNI

Sujet 5

Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Soit $A \subset E$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$.

1. Montrer que $f(B) \subset B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

Sujet 6

Démontrer que : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), \quad A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Sujet 7

Soit $f : E \to F$ une application, et G un troisième ensemble ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ll} E^G & \longrightarrow F^G \\ \varphi & \longmapsto f \circ \varphi \end{array} \right. \quad \text{et } f^* : \left\{ \begin{array}{ll} G^F & \longrightarrow G^E \\ \varphi & \longmapsto \varphi \circ f \end{array} \right.$$

Montrer que :

1. f est injective $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ est injective $\Leftrightarrow$ f^* est surjective.
2. f est surjetive $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ est surjective $\Leftrightarrow$ f^* est injective.